А. Н. ЧЕРКАСОВ

ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517
Ч 48
510 (075.4)

АННОТАЦИЯ

Книга «Введение в высшую математику» предназначается главным образом для самообразования. Она также годится для студентов тех учебных заведений, в которых на математику отведено 120—150 часов. Автор надеется, что, кроме того, эта книга может быть использована и другими учебными заведениями в качестве материала, развивающего математическую интуицию, необходимую при чтении учебников математического анализа. В этой книге далеко не все доказывается, однако нельзя сказать, чтобы в книге давалась только рецептура.

Большое внимание обращено на приложения дифференциального и интегрального исчислений.

Неопределенный интеграл дается в минимальном объеме, необходимом для решения задач на приложения определенного интеграла.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга появилась в результате того, что в течение ряда лет я преподавал небольшой курс высшей математики, рассчитанный на 130 часов. Материал, изложенный в книге, был посилен учащимся, и они его усваивали.

В предлагаемой книге напоминаются некоторые разделы из курса средней школы, которые, как показывает опыт, или забываются или же просто плохо проходятся, как, например, построение графиков квадратного трехчлена, радианная мера угла и др.

При написании этой книги я счел возможным использовать идеи Ф. Клейна, выдвинутые им по поводу геометрии. Клейн говорил, что нелепо при начальном обучении доказывать теоремы, которые кажутся учащимся очевидными. Он считал, что сначала надо сделать ясным, что надо и почему надо доказывать, т. е. сначала сделать теорему неочевидной, и только после этого переходить к ее доказательству. Конечно, это надо делать не по отношению к единичной теореме, а по отношению к целому разделу. Мне кажется, что эти соображения относятся и к так называемой высшей математике. Действительно, если объекты геометрии при самой элементарной абстракции можно видеть в окружающем мире, то для того, чтобы видеть объекты высшей математики, нужна привычка к более глубокой абстракции.

Исходя из этих соображений, я считаю, что, например, понятие предела, которое требует предварительного интуитивного прочувствования, можно развить, давая предварительно примеры, продвигающие учащегося к пониманию этого понятия. Доказывать теоремы о пределах в таком небольшом курсе не только бесполезно, но, пожалуй, даже вредно. Эти теоремы должны сообщаться учащимся в качестве свойств предела, присущих ему, т. е., собственно говоря, включаться в определение предела.

Выводы формул для нахождения производных приведены лишь для некоторых функций, а остальные или не дают ничего нового, или же трудны.

Термин «бесконечно малая величина» (термин, а не понятие) настолько неясен, что в теории пределов его не стоит употреблять, а кроме того, без него можно обойтись. Поэтому бесконечно малая впервые упоминается только в главе о дифференциале, т. е. там, где без нее нельзя обойтись.

Понятию дифференциала я придаю большое значение. На этом понятии надо задержать внимание учащихся.

Определение неопределенного интеграла обычно дается в терминах «производная», а записывается при помощи дифференциала. При этом у учащихся возникает естественный вопрос: почему под знаком интеграла стоит dx? Чтобы этот вопрос не возникал, я дал определение первообразной при помощи дифференциала.

О неточности выводов с помощью дифференциала. Все, что в предлагаемой книге сделано, верно в классе непрерывных и дифференцируемых функций с конечным числом экстремумов. Думаю, что для такого курса этот класс достаточно широк. Если у читателя возникнет вопрос, «а как быть в других случаях?», то я буду считать, что книга удачна.

Теорема Лагранжа не включена, так как она является одной из самых трудных, не в силу трудности ее доказательства, которое учащиеся могут вызубрить и повторить, а потому, что на этом этапе обучения доказательство теоремы «не доходит», так как доказуемый факт для учащегося проще, чем доказательство. Для исследования возрастания и убывания функции можно (что и сделано) применить не теорему Лагранжа, а определение производной, как на это обратил внимание Валле-Пуссен.

Что касается неопределенного интеграла, то я не ставил своей задачей обучить учащихся технике интегрирования, а счел возможным ограничиться показом примеров, которые употребляются в дальнейшем. Думаю, что этого достаточно, так как значение интегрирования в элементарных функциях невелико.

Определенный интеграл дан также кратко, но его приложения даны примерно в таком же объеме, как во всех курсах.

Хотя я не отрицаю важности приближенного вычисления определенного интеграла, но формула Симпсона написана мною только по настоянию преподавателей прикладных дисциплин.

Содержание главы, посвященной функциям многих переменных, также определялось требованиями прикладных наук.

В главе о дифференциальных уравнениях дано меньше, чем я хотел бы, но при указанном числе часов мне никогда не удавалось сделать больше.

После того как введено понятие непрерывной функции, сделано предупреждение, что в дальнейшем, если нет оговорок, функция считается непрерывной. Однако это не значит, что в курсе нет примеров разрывных функций. В нужной мере они показаны.

В заключение отмечу, что я стремился сделать курс прикладным в том смысле, что после его изучения учащийся должен уметь решать задачи, которые он может встретить в физике и технике, доводя их там, где возможно, до числа либо до знака определенного интеграла, и иметь представление о приближенных вычислениях. С другой стороны, учащийся должен понять, что математика — это не набор вычислений, что в ней имеют место и качественные исследования.

А. Черкасов

ГЛАВА I
КООРДИНАТЫ

§ 1. Координаты на прямой

Если на прямой задано направление, то такую прямую называют ***направленной***, а выбранное направление — ***положительным***. Например, на горизонтальной прямой можно отметить направление вправо, тогда будем говорить, что направленная прямая имеет положительное направление вправо. Можно с таким же правом считать положительным и направление влево. Направление прямой будем указывать стрелкой (рис. 1).

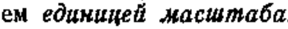

Рис. 1.

Выберем на направленной прямой точку, которую назовем ***началом отсчета*** или ***началом координат***, и будем обозначать ее буквой O. Кроме того, выберем отрезок, длину которого будем считать единицей длины. Этот отрезок назовем *единицей масштаба*.

Определение. *Прямая линия, на которой указаны: **начало отсчета**, **единица масштаба** и **направление отсчета**, называется **осью координат**.*

Рассмотрим отрезок, расположенный на оси координат. Если одну из точек, ограничивающих отрезок, назовем началом отрезка, а другую — его концом, то отрезок будем называть ***направленным*** отрезком. Направленный отрезок обозначают двумя буквами, например: AB, CM, KP, причем на первом месте ставят букву, обозначающую начало, на втором — букву, обозначающую конец. Таким образом, запись AB показывает, что начало отрезка есть точка A, а конец — точка B. Направление отрезка считается от начала к концу.

Если направление отрезка совпадает с направлением оси, то отрезок называют положительно направленным; если же его направление противоположно направлению оси, то — отрицательно направленным. Таким образом, отрезки AB и BA имеют противоположные направления. Это записывают так:

$$AB = -BA. \tag{1}$$

Отметим, что положительный отрезок может находиться в любом месте координатной оси, только его направление должно совпадать с направлением оси.

Сложение направленных отрезков производится по следующему правилу:

Для того чтобы сложить два направленных отрезка, нужно к концу первого приложить начало второго; тогда отрезок, имеющий началом начало первого отрезка и концом конец второго, называют суммой двух направленных отрезков.

Из этого определения вытекает, что сумма отрезков AB и BC равна отрезку AC при любом расположении точек A, B, C, т. е. всегда:

$$AB + BC = AC \tag{2}$$

(рис. 2 и 3).

Координатным отрезком точки A называется направленный отрезок, имеющий начало в точке O (т. е. в начале координат), а концом — рассматриваемую точку A.

Рис. 2.

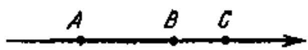

Рис. 3.

Всякий направленный отрезок, лежащий на оси, можно выразить через координатные отрезки его начала и конца. В самом деле, рассмотрим направленный отрезок AB. На основании равенства (2) можно написать

$$AO + OB = AB$$

(здесь вместо точки B поставлена точка O, а вместо точки C точка B) или

$$AB = OB + AO.$$

Отрезок OB есть координатный отрезок (его начало есть точка O), но отрезок AO не является координатным, поскольку его начало не является началом координат. Но в силу равенства (1)

$$AO = -OA,$$

поэтому можно написать

$$AB = OB - OA. \tag{3}$$

Получен следующий результат:

Направленный отрезок равен разности координатного отрезка его конца и координатного отрезка его начала.

Это верно для любого отрезка, лежащего на координатной оси.

Теперь дадим одно из самых важных определений:

Координатой точки на координатной оси называется число, равное по абсолютной величине длине координатного отрезка этой точки и по знаку совпадающее со знаком координатного отрезка.

Точку A, имеющую координатной число x, будем обозначать $A(x)$.

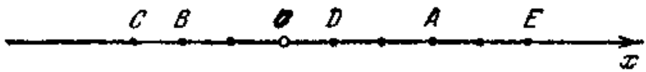

Рис. 4.

Указанные на рис. 4 точки имеют следующие координаты:

$$A(+3),\quad B(-2),\quad C(-3),\quad D(+1),\quad E(+5).$$

Будем также писать

$$x = \overline{OA}. \tag{4}$$

Если даны точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то на основании формул (3) и (4) получим

$$\overline{AB} = x_2 - x_1, \tag{5}$$

т. е. *направленный отрезок равен разности координат его конца и начала.*

Отсюда сразу получаем, что *длина отрезка равна абсолютной величине разности координат его конца и начала.*

Длину отрезка будем обозначать, пользуясь знаком $|\ |$, т. е. знаком абсолютной величины. Таким образом, длина отрезка AB будет записываться так:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Пример 1. Если даны точки $A(+4)$, $B(+8)$, то отрезок $AB = (+8) - (+4)$, а его длина $|AB| = |+4| = 4$.

Если даны точки $M(+5)$ и $P(+3)$, то отрезок $MP = (+3) - (+5) = -2$, а его длина $|MP| = |-2| = 2$.

Даны две точки: $Q(+3)$ и $S(-4)$. Длина отрезка

$$|QS| = |(-4) - (+3)| = 7.$$

Даны две точки $R(-6)$ и $T(-2)$; отрезок $RT = (-2) - (-6) = +4$, а его длина $|RT| = 4$.

Пример 2. Начало отрезка AB находится в точке $A(-950)$, а конец — в точке $B(-1200)$; найти его направление и длину.

Отрезок $AB = (-1200) - (-950) = -250$. Так как он получился отрицательным, то его направление противоположно направлению оси. Его длина равна $|AB| = |-250| = 250$.

Задача 1. На координатной оси даны две точки: $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Найти точку C, лежащую между ними и делящую отрезок AB в отношении $m:n$.

Чтобы найти точку, надо найти ее координату. По условию задачи должно быть

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}. \tag{6}$$

Обозначая координату искомой точки C через x и выражая отрезки через координаты, т. е. применяя формулу (5), получим, что $AC = x - x_1$, $CB = x_2 - x$. Подставляя эти выражения в равенство (6), будем иметь

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}.$$

Решая последнее уравнение относительно x, найдем:

$$nx - nx_1 = mx_2 - mx,$$

$$nx + mx = mx_2 + nx_1,$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}. \tag{7}$$

Это и есть координата искомой точки.

Пример 3. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении 1:2, если даны начало отрезка $A(+3)$ и конец $B(+5)$ (рис. 5).

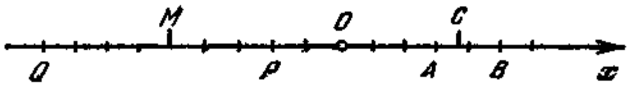

Рис. 5.

Здесь $m=1$, $n=2$, $x_1=3$, $x_2=5$. Применяя формулу (7), получим

$$x=\frac{1\cdot5+2\cdot3}{1+2}=\frac{11}{3}.$$

Пример 4. Найти точку M, делящую расстояние между точками $P(-2)$ и $Q(-9)$ в отношении 3:4 (рис. 5). Здесь $m=3$, $n=4$, $x_1=-2$, $x_2=-9$. По формуле (7) находим

$$x=\frac{3\cdot(-9)+4\cdot(-2)}{3+4}=\frac{-35}{7}=-5.$$

Если $m=n$, т. е. точка C делит отрезок AB пополам, тогда формула (7) перепишется так:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{8}$$

Таким образом, *координата точки, делящей отрезок пополам, равна средней арифметической координат его начала и конца*.

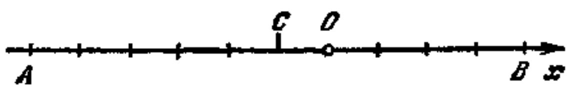

Рис. 6.

Пример 5. Найдем середину отрезка, заключенного между точками $A(-6)$ и $B(4)$ (рис. 6).

Применяя формулу (8), получим, что $x=\frac{-6+4}{2}=-1$.

§ 2. Координаты на плоскости

Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. На каждой из этих прямых зададим направление, указав его стрелкой (рис. 7). Установим масштаб, общий для обеих прямых, а за начало отсчета выберем точку O.

Определение. *Координатными осями на плоскости называются две взаимно перпендикулярные прямые, на которых установлены:* 1) *направления,* 2) *масштаб и* 3) *общая точка отсчета.*

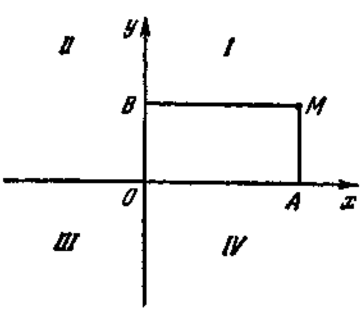

Рис. 7.

Назовем одну из осей осью Ox или осью *абсцисс*, другую — осью Oy или осью *ординат*. Точку их пересечения назовем началом координат.

Возьмем произвольную точку M, лежащую на плоскости, и опустим из нее перпендикуляры на оси координат, т. е. найдем ее проекции на оси. Обозначим проекцию на ось Ox через A, а проекцию на ось Oy через B. Обозначим координату точки A (по оси Ox) через x, а координату точки B (по оси Oy) через y. Введем определение:

Определение. *Абсциссой точки называется координата ее проекции на ось Ox. Ординатой точки называется координата ее проекции на ось Oy.*

Абсциссу точки обычно обозначают буквой x, ординату — буквой y. Точку M, имеющую абсциссу x и ординату y, обозначают следующим образом: пишут скобку и в ней на первом месте ставят абсциссу, на втором ординату и разделяют эти два числа запятой или точкой с запятой. Таким образом, запись точки выглядит так: $M(x, y)$.

Координатные оси разделяют плоскость на четыре части, которые называют четвертями.

Первой четвертью называется та часть плоскости, в которой абсцисса и ордината положительны.

Второй четвертью — та часть, в которой абсцисса отрицательна, а ордината положительна.

Третьей четвертью — та часть, в которой абсцисса и ордината отрицательны, и, наконец, четвертой, — та часть, в которой абсцисса положительна, а ордината отрицательна (рис. 7). На рис. 8 указаны точки $M_1(5, 2)$, $M_2(-1, 1)$, $M_3(-1, -3)$, $M_4(2, -3)$. Заметим, что абсцисса $x = OA$ по абсолютной величине равна расстоянию точки от оси ординат, так как $OA = BM$ (см. рис. 7), а ордината — расстоянию точки M от оси абсцисс, так как $OB = AM$.

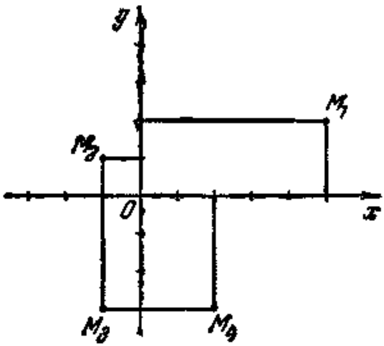

Рис. 8.

Пример 1. Найти точку $P(-4, 2)$ (рис. 9). Возьмем на оси Ox точку A с координатой -4, ее координатный отрезок $OA = -4$. На оси Oy возьмем точку B с координатным отрезком $OB = 2$. Восставим перпендикуляры к осям из точек A и B, точка их пересечения и даст искомую точку P.

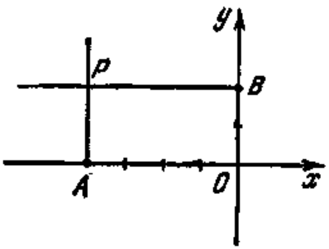

Рис. 9.

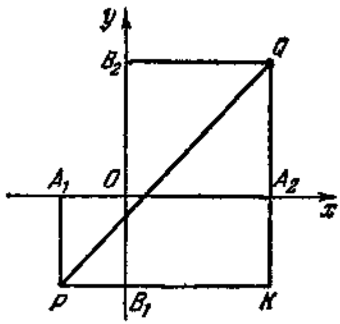

Рис. 10.

Задача 1. Найти расстояние между точками $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$. Иначе говоря, нужно найти длину отрезка PQ (рис. 10).

Обозначим проекцию точки P на ось Ox через A_1, а ее проекцию на ось Oy — через B_1. Проекцию точки Q на ось

Ox обозначим через A_2 и через B_2 — ее проекцию на ось Oy. Тогда $OA_1 = x_1$, $OB_1 = y_1$, $OA_2 = x_2$, $OB_2 = y_2$. Из точки P проведем прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с прямой A_2Q в точке K. Рассмотрим треугольник PKQ. По теореме Пифагора имеем $PQ^2 = PK^2 + KQ^2$ (*). Но $PK = A_1A_2$, $KQ = B_1B_2$, как противоположные стороны прямоугольников; кроме того, на основании формулы (3 из § 1) направленные отрезки A_1A_2 и B_1B_2 будут равны

$$A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1;\ B_1B_2 = OB_2 - OB_1 = y_2 - y_1.$$

Подставляя полученные выражения в (*), получим

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{1}$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей координат.*

Примечание. Расстояние между двумя точками, так же как длина отрезка, всегда положительно, поэтому в формуле (1) перед квадратным корнем берут только знак плюс.

Пример 2. Найти расстояние между точками $P(-2, -1)$ и $Q(2, 2)$. Применяя формулу (1), получим

$$|PQ| = \sqrt{[2-(-2)^2] + [2-(-1)]^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Пример 3. Найти длину отрезка MN, если даны $M(8, 2)$ и $N(2, 10)$. Применяя формулу (1), получим

$$|MN| = \sqrt{(2-8)^2 + (10-2)^2} = 10.$$

Задача 2. Найти точку C, делящую отрезок PQ в отношении $m:n$, если известны координаты точек $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$. По условию задачи надо найти такую точку C, чтобы было выполнено равенство

$$\frac{PC}{CQ} = \frac{m}{n}.$$

Решение. Обозначим, как и выше, проекции точки P на оси через A_1 и B_1, а проекции точки Q — через A_2 и B_2; тогда $OA_1 = x_1$, $OB_1 = y_1$, $OA_2 = x_2$, $OB_2 = y_2$ (рис. 11). Кроме того, обозначим координаты искомой точки C через x и y, а ее проекции на оси — через A и B, т. е. $OA = x$, $OB = y$.

Так как прямые A_1P, AC и A_2Q параллельны между собой, то на основании теоремы о пропорциональных отрезках можно записать, что

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{PC}{CQ}=\frac{m}{n}. \qquad (*)$$

Но $A_1A=OA-OA_1=x-x_1$, $AA_2=OA_2-OA=x_2-x$; поэтому, подставляя в равенство (*), будем иметь уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{m}{n},$$

решая которое найдем абсциссу точки C:

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}. \qquad (2)$$

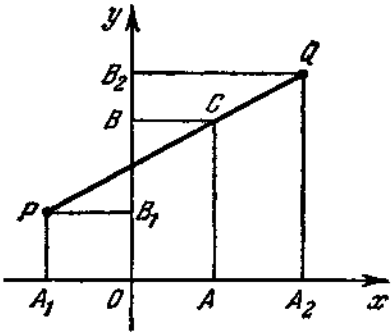

Рис. 11.

Рассуждая аналогично о проекциях на ось Oy, т. е. о точках B_1, B и B_2, получим ординату точки C, делящей отрезок в отношении $m:n$,

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}. \qquad (3)$$

Итак, искомая точка C имеет координаты, определяемые равенствами (2) и (3).

Пример 4. Найти точку, делящую в отношении 1:2 отрезок PQ, где $P(4, -3)$ и $Q(8, 0)$. Здесь $x_1=4$, $y_1=-3$, $x_2=8$, $y_2=0$, $m=1$, $n=2$. Применяя формулы (2) и (3), получим:

$$x=\frac{1\cdot 8+2\cdot 4}{1+2}=\frac{16}{3}, \quad y=\frac{1\cdot 0+2\cdot(-3)}{1+2}=-2.$$

Пример 5. Найти точку, делящую расстояние между точками $A(4, 2)$ и $B(8, 10)$ в отношении 3:1. Здесь $x_1=4$, $y_1=2$, $x_2=8$, $y_2=10$, $m=3$, $n=1$. По формулам (2) и (3) находим:

$$x=\frac{3\cdot 8+1\cdot 4}{3+1}=\frac{28}{4}=7, \quad y=\frac{3\cdot 10+1\cdot 2}{3+1}=\frac{32}{4}=8.$$

Следствие (из формул (2) и (3)). Если точка C делит отрезок PQ пополам, то $m=n$, поэтому

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \tag{4}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{5}$$

т. е. *абсцисса середины отрезка равна средней арифметической абсцисс его начала и конца; ордината середины отрезка равна средней арифметической ординат его начала и конца.*

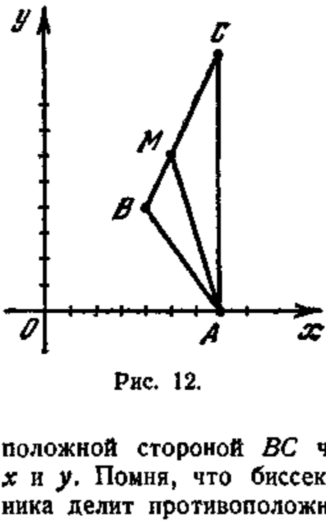

Рис. 12.

Задача 3. Даны три вершины треугольника: $A(7,\ 0)$, $B(4,\ 4)$ и $C(7,\ 10)$. Найти длину биссектрисы угла A (рис. 12).

Найдем длины сторон AB и AC. Для этого применим формулу (1):

$$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(4-0)^2}=5,$$

$$|AC|=\sqrt{(7-7)^2+(10-0)^2}=10.$$

Обозначим точку пересечения биссектрисы угла A с противоположной стороной BC через M, а ее координаты — через x и y. Помня, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, можно утверждать, что точка M делит отрезок BC в отношении $5:10=\frac{1}{2}$; поэтому, применяя формулы (2) и (3), получим:

$$x=\frac{1\cdot 7+2\cdot 4}{1+2}=\frac{15}{3}=5,$$

$$y=\frac{1\cdot 10+2\cdot 4}{1+2}=\frac{18}{3}=6,$$

т. е. $M(5,\ 6)$.

Теперь вычисляем длину биссектрисы как расстояние между точками $A(7,\ 0)$ и $M(5,\ 6)$:

$$|AM|=\sqrt{(5-7)^2+(6-0)^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}.$$

Задача 4. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(4,\ 6)$, $B(-8,\ 10)$, $C(-2,\ -6)$ (рис. 13).

Точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Обозначим через M середину стороны AC; по формулам (4) и (5) можно найти ее координаты:

$$x=\frac{4+(-2)}{2}=1,$$

$$y=\frac{6+(-6)}{2}=0,$$

т. е. $M(1,\ 0)$. Точка P пересечения медиан делит отрезок BM в отношении $2:1$, поэтому ее координаты найдутся по формулам (2) и (3):

$$x=\frac{2\cdot 1+1\cdot(-8)}{2+1}=-2,$$

$$y=\frac{2\cdot 0+1\cdot 10}{2+1}=\frac{10}{3}.$$

Итак, искомая точка $P\left(-2,\ \frac{10}{3}\right)$.

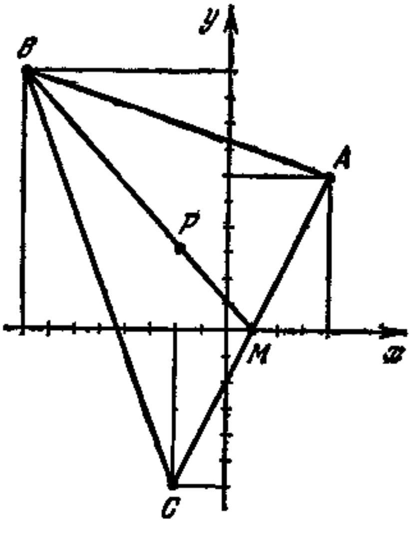

Рис. 13.

Задача 5. Записать условие того, что точка $M(x,\ y)$ находится на расстоянии 5 от точки $C(1,\ 4)$.

По формуле (1) имеем

$$|CM|=5=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$$

или, возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$(x-1)^2+(y-4)^2=25. \qquad (*)$$

Это равенство есть уравнение с двумя неизвестными x и y. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на расстоянии 5 от точки C. Иначе говоря, ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей геометрическому месту точек, расстояние которых от точки C равно 5. Это геометрическое место есть окружность.

Следовательно, можно сказать, что уравнение (*) есть уравнение окружности с центром в точке C и радиуса 5.

В следующих главах будут рассмотрены уравнения с двумя неизвестными x и y и те линии (геометрические места), точки которых имеют координаты, удовлетворяющие этим уравнениям.

Упражнения к гл. I

1. Вычислить длину отрезка, начало которого находится в точке (-3), а конец в точке (-20).

2. Положителен или отрицателен отрезок, если его начало находится: 1) в точке (-1), а конец в точке $(+3)$; 2) начало в точке $(+14)$, конец в точке $(+8)$; 3) начало в (-5), а конец в (-2)?

3. Найти точку, делящую отрезок AB в отношении $2:5$, если $A(-2)$, $B(+5)$.

4. Найти расстояние между точками $A(0, -4)$ и $B(3, 4)$.

5. Найти длину отрезка AB, если $A(3, 4)$ и $B(-1, -1)$.

6. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $2:3$, если $A(1, 2)$ и $B(7, 8)$.

7. Найти точку, делящую расстояние между точками $P(-3, 4)$ и $Q(5, 6)$ пополам.

8. Доказать, что треугольник, вершинами которого служат точки $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ и $C(-1, 4)$, является прямоугольным.

9. Найти длины медиан треугольника с вершинами в точках $A(3, 4)$, $B(-1, 1)$ и $C(0, -3)$.

ГЛАВА II
ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Определение и геометрический смысл

Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными x и y:

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k и b — заданные числа. Этому уравнению удовлетворяет бесконечное множество пар чисел x и y.

Например, уравнению

$$y = 2x - 6 \tag{*}$$

удовлетворяют следующие пары:

$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=\sqrt{17}$
$y=-4$	$y=-2$	$y=0$	$y=2$	$y=4$	$y=2\sqrt{17}-6$

и т. д.

Для того чтобы найти пару чисел, удовлетворяющих уравнению (*), нужно **придать** x **произвольное** числовое значение и подставить в уравнение (*), тогда y **получит определенное** числовое значение. Например, если $x = 27$, то $y = 2 \cdot 27 - 6 = 48$. Очевидно, что пара чисел $x = 27$ и $y = 48$ удовлетворяет уравнению (*). Так же и в случае уравнения (1) можно придать x **произвольное** числовое значение и получить для y **соответствующее** числовое значение.

Так как в данном уравнении x может принимать любое числовое значение, то его называют переменной величиной. Поскольку выбор этого числового значения ничем не ограничен, то x называют ***независимой переменной величиной*** или ***аргументом***.

Для y получаются также различные значения, но уже в зависимости от выбранного значения x; поэтому y называют ***зависимым переменным*** или ***функцией***.

Функцию y, определяемую уравнением (1), называют ***линейной функцией***.

Пример 1. Вычислить значения линейной функции, определяемой уравнением $y = 0{,}5x + 3{,}7$, при следующих значениях независимого переменного: $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}5$, $x_3 = -7{,}6$.

Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 0{,}5\cdot 0 + 3{,}7 = 3{,}7$;

если $x_2 = -0{,}5$, то $y_2 = 0{,}5\cdot(-0{,}5) + 3{,}7 = 3{,}45$;

если $x_3 = -7{,}6$, то $y_3 = 0{,}5\cdot(-7{,}6) + 3{,}7 = -0{,}1$.

Покажем, что если принять пару чисел x и y, удовлетворяющих уравнению (1), за абсциссу и ординату точки, то геометрическим местом этих точек будет прямая линия (рис. 14).

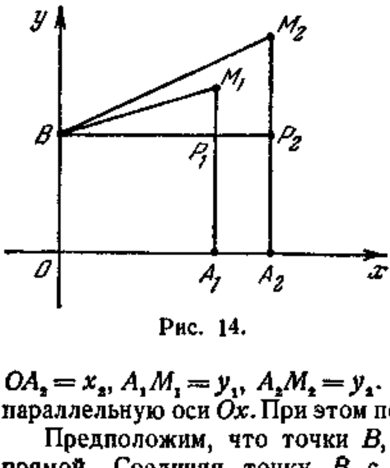

Рис. 14.

В самом деле, рассмотрим точку $B(0,\ b)$ и точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), т. е.

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b.$$

Обозначим проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox через A_1 и A_2, тогда $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$, $A_1M_1 = y_1$, $A_2M_2 = y_2$. Проведем из точки B прямую, параллельную оси Ox. При этом получим $b = OB = A_1P_1 = A_2P_2$.

Предположим, что точки B, M_1 и M_2 не лежат народной прямой. Соединяя точку B с точками M_1 и M_2, получим два прямоугольных треугольника BP_1M_1 и BP_2M_2, из которых имеем:

$$BP_1 = OA_1 = x_1, \quad BP_2 = OA_2 = x_2,$$
$$P_1M_1 = A_1M_1 - A_1P_1 = y_1 - b,$$
$$P_2M_2 = A_2M_2 - A_2P_2 = y_2 - b.$$

Но так как x_1, y_1 и x_2, y_2 удовлетворяют уравнению (1), то

$$y_1 = kx_1 + b, \quad k = \frac{y_1 - b}{x_1};$$

$$y_2 = kx_2 + b, \quad k = \frac{y_2 - b}{x}.$$

Иначе говоря,

$$\frac{P_1M_1}{BP_1}=k, \quad \frac{P_2M_2}{BP_2}=k.$$

Выражения $\frac{P_1M_1}{BP_1}$ и $\frac{P_2M_2}{BP_2}$ являются отношениями противоположных катетов к прилежащим для углов $\angle P_1BM_1$ и $\angle P_2BM_2$. Следовательно, $\operatorname{tg}\angle P_1BM_1=k$ и $\operatorname{tg}\angle P_2BM_2=k$, а поэтому и $\angle P_1BM_1=\angle P_2BM_2$, так как углы острые. Это значит, что точки M_1, M_2 и B лежат на одной прямой. Но мы предположили, что эти точки не лежат на одной прямой. Таким образом, мы пришли к противоречию, а это и доказывает, что точки M_1, M_2 и B лежат на одной прямой. Обозначим угол P_1BM_1 через α. Этот угол образован прямой BM_1 с положительным направлением оси Ox.

Так как M_1 и M_2 — произвольные точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), то можно сделать следующее заключение: *любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению* (1), *лежит на прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $OB=b$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=k$.*

Число b называется *начальной ординатой,* число k — *угловым коэффициентом прямой.*

Предыдущие рассуждения позволяют сделать вывод: *линейная функция $y=kx+b$ определяет на плоскости прямую, у которой начальная ордината равна b, а угловой коэффициент k.*

Например, линейная функция $y=\sqrt{3}\,x-4$ определяет на координатной плоскости прямую, отсекающую на оси Oy отрезок -4 и наклоненную к оси Ox под углом в $60°$, так как $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$.

Если имеем определенную прямую, отсекающую на оси Oy отрезок b и наклоненную к оси Ox под углом $\alpha\,(\alpha\neq 90°)$, тангенс которого равен k, то, взяв произвольную абсциссу, найдем на указанной прямой только одну точку, имеющую эту абсциссу, т. е. по заданному x найдется только одна точка, а следовательно, и одно значение y.

Очевидно, имеет место и такое предложение:

Всякой прямой, отсекающей на оси Oy отрезок b и наклоненной к оси Ox под углом, тангенс которого равен числу k, соответствует линейная функция $y=kx+b$.

Координаты любой точки, лежащей на указанной прямой, удовлетворяют уравнению (1), ***поэтому уравнение*** $y = kx + b$ ***называют уравнением прямой.*** Таким образом, ***всякая линейная функция является уравнением некоторой прямой.***

Отметим частные случаи.

1. Пусть $b = 0$, т. е. линейная функция определяется уравнением

$$y = kx. \tag{2}$$

Прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат. Здесь y пропорционален x, т. е. если x увеличить (уменьшить) в несколько раз, то и y увеличится (уменьшится) во столько же раз.

Рис. 15.

2. Пусть $k = 0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 0$, откуда $\alpha = 0$. Линейная функция определяется уравнением

$$y = b. \tag{3}$$

Этому уравнению соответствует прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от нее на расстояние b.

На основании всего сказанного в этом параграфе легко решаются следующие задачи.

Задача 1. Даны точки $A(3, 5)$ и $B(-1, 4)$. Нужно узнать, лежат ли эти точки на прямой, уравнение которой имеет вид

$$y = 2x - 1. \tag{*}$$

Решение. Если точка лежит на прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Поэтому для решения задачи подставим координаты точки A в уравнение (*), получим $5 = 2 \cdot 3 - 1$. Это тождество, следовательно, точка A лежит на прямой. Подставляя координаты точки B, получаем $4 = 2(-1) - 1 = -3$. Отсюда видно, что точка B не лежит на прямой.

Задача 2. Построить прямую, уравнение которой

$$y = \frac{1}{2}x + 3. \tag{**}$$

Решение. Чтобы построить прямую, надо знать, например, две ее точки. Поэтому дадим x произвольное значение, например $x=2$, и найдем из уравнения (**) значение $y=\frac{1}{2}\cdot 2+3=4$. Значит, точка $A(2, 4)$ лежит на прямой. Это первая точка. Теперь дадим x какое-нибудь другое значение, например $x=-2$, и вычислим y из уравнения (**). Получим $y=\frac{1}{2}(-2)+3=2$. Точка $B(-2, 2)$ лежит на прямой. Это вторая точка. Строим точки A и B (рис. 15) и проводим через них прямую, это и есть искомая прямая.

§ 2. Основное свойство линейной функции

Рассмотрим линейную функцию $y=kx+b$. Найдем значение этой функции при $x=x_1$ и $x=x_2$ $(x_1 \neq x_2)$:

$$y_1=kx_1+b, \tag{*}$$

$$y_2=kx_2+b. \tag{**}$$

Здесь первое и второе значения x различны, они отличаются друг от друга на величину x_2-x_1. Величину разности x_2-x_1, на которую изменяется x при переходе от x_1 к x_2, назовем *приращением* независимого переменного x. Эту величину часто будем обозначать через h, так что $h=x_2-x_1$. Найдем, насколько изменилось значение y при изменении x_1 на h. Для этого вычтем из y_2 значение y_1:

$$y_2-y_1=(kx_2+b)-(kx_1+b)=k(x_2-x_1).$$

Таким образом,

$$y_2-y_1=kh,$$

т. е. *приращение линейной функции пропорционально приращению независимого переменного*.

Это и есть основное свойство линейной функции.

Заметим, что x_2 может быть больше, а может быть и меньше, чем x_1. Поэтому $h=x_2-x_1$ может быть как положительным, так и отрицательным числом, иначе говоря, приращение h независимого переменного может быть любого знака. То же самое относится и к приращению функции, т. е. к величине y_2-y_1.

Пример 1. Найдем приращение функции $y=0{,}6x-3$, если приращение независимого переменного $h=0{,}1$.

По основному свойству $y_2-y_1=0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}06$.

Приращение этой же функции $y=0{,}6x-3$, если $h=-3$, будет равно $y_2-y_1=0{,}6\cdot(-3)=-1{,}8$. В этом случае приращения независимого переменного и функции отрицательны, т. е. в этом случае и независимое переменное и функция не увеличиваются, а уменьшаются.

Пример 2. Найдем приращение функции $y=-2x+10$ при изменении x на $h=-0{,}5$. Будем иметь

$$y_2-y_1=-2\cdot(-0{,}5)=+1.$$

§ 3. Задачи на прямую

Задача 1. Найти угол γ между двумя прямыми, заданными уравнениями

$$y=k_1x+b_1, \qquad y=k_2x+b_2.$$

Решение. При пересечении прямых образуются четыре попарно равных угла. Найдя один из них, легко найти и другие. На рис. 16 прямые обозначены соответственно (*1*) и (*2*).

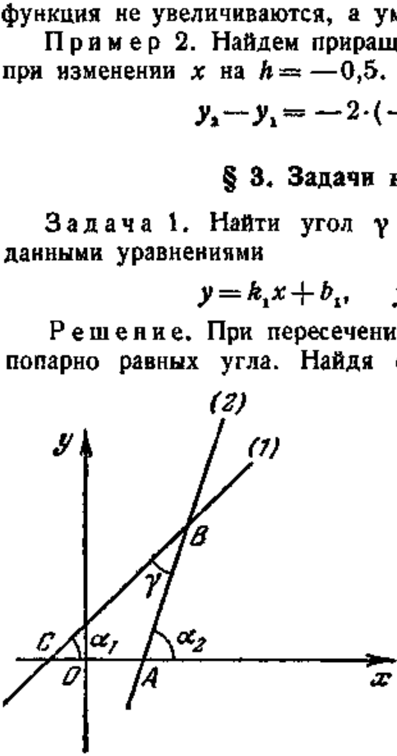

Рис. 16.

Угол xAB является внешним по отношению к треугольнику ABC, поэтому он равен сумме двух внутренних углов треугольника, с ним не смежных, т. е.

$$\angle xAB=\angle ACB+\angle CBA,$$

откуда

$$\gamma=\angle CBA=\angle xAB-\angle ACB=\alpha_2-\alpha_1.$$

Но углы α_1 и α_2 непосредственно неизвестны, а известны их тангенсы $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$. Поэтому напишем

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1),$$

или

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}, \text{ или } \operatorname{tg}\gamma=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y=2x+1$, $y=-3x$.

Здесь $k_1=2$, $k_2=-3$; применяя формулу (1), получим:

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{-3-2}{1+(-3)(2)}=\frac{-5}{-5}=1; \qquad \gamma=\frac{\pi}{4}.$$

Если же будем считать, что $k_1=-3$, $k_2=2$, то

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{2-(-3)}{1+(-3)\,2}=-1; \qquad \gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

Получены два ответа: сначала найден острый угол между заданными прямыми, а затем — тупой.

Если заданы две параллельные прямые, то углы α_1 и α_2 равны, как соответственные, следовательно, тангенсы их тоже равны

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2, \text{ т. е. } k_2=k_1.$$

Таким образом, мы приходим к выводу: *если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.*

Если прямые перпендикулярны, то угол между ними равен 90°, т. е. $\frac{\pi}{2}$. Но тангенс прямого угла не существует, поэтому формула (1) не должна давать ответа, а это может быть только в том случае, когда знаменатель равен нулю (на нуль делить нельзя):

$$1+k_1k_2=0, \text{ или } k_1=-\frac{1}{k_1}. \tag{2}$$

Это и есть условие перпендикулярности двух прямых. Это условие удобно запомнить в следующей формулировке: *если две прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.*

Пример 2. Найдем угол между прямыми, заданными уравнениями $y=3x+7$ и $y=-\frac{1}{3}x+1$.

Здесь угловые коэффициенты $\left(\text{первый равен 3, а второй } -\frac{1}{3}\right)$ обратны по величине и противоположны по знаку, следовательно, рассматриваемые прямые перпендикулярны.

Задача 2. Даны две точки: $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, где $x_1 \neq x_2$ (т. е. эти точки не лежат на одной прямой, параллельной оси Oy). Написать уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Решение. Искомая прямая не параллельна оси Oy, поэтому ее уравнение можно написать в виде $y = kx + b\,(*)$. Значит, для решения задачи надо определить числа k и b.

Так как прямая проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению $(*)$, т. е.

$$y_1 = kx_1 + b, \tag{**}$$

$$y_2 = kx_2 + b. \tag{***}$$

В уравнениях $(**)$ и $(***)$ все числа, кроме k и b, известны, поэтому эти уравнения можно рассматривать как систему уравнений относительно k и b. Решая систему, находим:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$b = y_1 - kx_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение $(*)$, получим

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через две точки, не расположенные на прямой, параллельной оси Oy.

Полученному уравнению можно придать форму, удобную для запоминания, а именно:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

Задача 3. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1,\ y_1)$ и образующей с осью Ox угол α.

Решение. Прежде всего найдем угловой коэффициент искомой прямой: он равен тангенсу угла α. Обозначим $\operatorname{tg}\alpha = k$. Значит, уравнение прямой можно написать в виде $y = kx + b\,(*)$, где пока число b неизвестно.

Так как прямая должна проходить через точку M, то координаты точки M удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Находим отсюда неизвестное b, получим $b = y_1 - kx_1$. Подставляя найденное в уравнение (*), будем иметь

$$y = kx + y_1 - kx_1 \text{ или } y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку M в заданном направлении.

Если в уравнении (4) менять направление, не меняя точку M, то получим уравнение всех прямых, проходящих через заданную точку. Уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$, в котором k переменное, а x_1 и y_1 не меняются, называется уравнением пучка прямых, проходящих через точку $M(x_1, y_1)$.

Пример 3. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 3)$ и образующей с осью Ox угол 45°.

Так как $\operatorname{tg} 45° = 1$, то угловой коэффициент равен 1; $x_1 = -2$; $y_1 = 3$. Уравнение прямой запишется в виде

$$y - 3 = 1(x + 2),$$

или

$$y = x + 5.$$

§ 4. Общее уравнение прямой. Неявная линейная функция

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Решим его относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \quad (2)$$

т. е. мы получили линейную функцию, где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Уравнения (1) и (2) равносильны, поэтому пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению (2), будет удовлетворять и уравнению (1). Так как уравнению (2) соответствует некоторая прямая, то эта же прямая будет соответствовать и уравнению (1).

Координаты любой точки, лежащей на этой прямой, удовлетворяют уравнению (1), поэтому будем называть его также уравнением прямой.

Рассмотрим особо случай, когда $B=0$, так как на нуль делить нельзя.

Уравнение (1) примет вид $Ax+O\cdot y+C=0$ или $Ax+C=0$, откуда $x=-\frac{C}{A}$. Поэтому, каков бы ни был y, x всегда равен $-\frac{C}{A}$. Это имеет место для прямой, параллельной оси Oy; в самом деле, на ней можно найти точку с любой ординатой, но все точки этой прямой имеют одну и ту же абсциссу.

Таким образом, любому уравнению первой степени соответствует некоторая прямая. Придавая в уравнении (1) коэффициентам A, B и C различные значения, можно получить любое уравнение первой степени. Поэтому уравнение (1) называют *общим уравнением прямой*.

Из уравнения (1) (если $B\neq 0$) можно определить y, т. е. получить линейную функцию; поэтому говорят, что уравнение (1) определяет *неявно* линейную функцию или что уравнение (1) есть *неявная* линейная функция.

§ 5. Система двух уравнений первой степени

Напомним, что две прямые, расположенные на плоскости, могут или пересекаться, или быть параллельными (т. е. не пересекаться), или сливаться (в этом случае можно сказать, что они пересекаются в каждой своей точке).

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений является уравнением прямой. Решить систему — это значит найти значения x и y, которые удовлетворяют и первому и второму уравнениям. Но так как x и y определяют точку, то следовательно, решить систему — это значит найти точку, лежащую и на первой и на второй прямых, т. е. найти точку пересечения прямых.

Пример 1. Найдем точку пересечения двух прямых:

$$2x+3y-8=0,$$
$$4x-y-2=0.$$

Решая эту систему, получим: $x=1$, $y=2$, т. е. прямые пересекаются в точке (1, 2) (рис. 17).

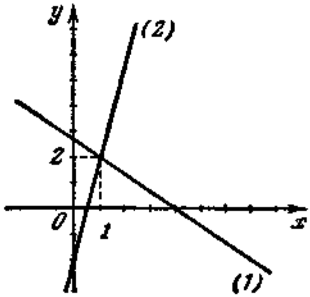

Рис. 17.

Пример 2. Найдем точку пересечения двух прямых:

$$4x+2y=8,$$
$$2x+y=5.$$

Решая эту систему, получим:

$$y=5-2x, \quad 4x+2(5-2x)=8,$$
$$4x+10-4x=8, \quad 10=8.$$

Последнее равенство нелепо, значит, прямые не пересекаются, т. е. они параллельны.

Пример 3. Найдем точку пересечения данных прямых

$$4x+2y=8 \text{ и } 2x+y=4.$$

Решая эту систему, получим:

$$y=4-2x, \quad 4x+2(4-2x)=8,$$
$$4x+8-4x=8, \ 8=8.$$

Полученное равенство всегда справедливо, т. е. справедливо при любом значении x. Это значит, что две прямые пересекаются в каждой своей точке, что может быть только тогда, когда они сливаются.

Заметим, что два уравнения, рассматриваемые в этом примере, являются равносильными, поэтому они и представляют одну и ту же прямую.

§ 6. Примеры применения линейной функции

Линейная функция встречается в формулировках многих физических законов и технических задач. Приведем примеры.

Пример 1. Если точка движется равномерно по прямой, то ее расстояние от выбранной точки (от начала координат) выражается при помощи уравнения $s = v_0 t + s_0$, где s_0 — начальное расстояние, v_0 — скорость, t — время; это, как мы уже знаем, есть линейная функция.

Пример 2. Закон Ома записывается в виде $v = RI$, где v — напряжение, R — сопротивление и I — ток. Если R не изменяется, то v является линейной функцией тока I.

Пример 3. Если стоимость провоза единицы товара по железной дороге равна a руб. за километр, то стоимость v провоза N единиц товара на l *км* равна $v = aNl$.

Если же стоимость товара на месте равна M руб., то после перевозки за него надо заплатить

$$v = aNl + M.$$

Здесь v — линейная функция l.

Линейная функция встречается в различных областях, но, где бы она ни встречалась, ее всегда можно рассматривать как уравнение прямой. Этим обстоятельством часто пользуются при решении задач.

Задача 1. Два города A и B, расстояние между которыми равно 300 *км*, находятся на одной железнодорожной магистрали. На этой же магистрали между городами A и B надо выбрать пункт C, в котором предполагается устроить склад нефти для снабжения указанных городов. Надо выбрать пункт C так, чтобы общая стоимость перевозок нефти для снабжения города A и города B была наименьшей. Известно, что город A потребляет 400 *т* нефти, а город B — 200 *т*. Перевозка одной тонны нефти на один километр обходится в a руб.

Решение. Обозначим расстояние от A до предполагаемого пункта C через x. Тогда расстояние от города B до C равно $300 - x$. Стоимость перевозки одной тонны нефти из C в A равна ax руб., а перевозки 400 *т* — $400ax$ руб. Аналогично перевозка нефти из C в B будет стоить $200a(300 - x)$ руб. Стоимость всех перевозок, которую обозначим через y, будет выражаться так:

$$y = 400ax + 200a(300 - x)$$

или

$$y = 200ax + 60\,000a.$$

Это линейная функция. Если примем x за абсциссу, а y за ординату точки, то полученная линейная функция определяет уравнение некоторой прямой. Угловой коэффициент ее равен $200a$, т. е. положителен, следовательно, эта прямая образует с осью Ox острый угол и поэтому с увеличением независимого переменного поднимается вверх. По смыслу задачи величина x заключена между 0 и 300, т. е. $0 \leqslant x \leqslant 300$. При $x=0$ величина y принимает значение $60\,000a$, а при $x=300$ — значение $120\,000a$. Ясно, что $60\,000a$ есть наименьшее из возможных значений, $120\,000a$ — наибольшее.

Так как пункт C надо выбрать так, чтобы стоимость была наименьшей, то его следует расположить в городе A; если же этого сделать нельзя по каким-либо соображениям, то, чем ближе расположить его к A, тем выгодней.

Упражнения к гл. II

1. Построить прямые:

$$\text{а) } x=1; \text{ б) } y=-2; \text{ в) } y=\frac{1}{3}x-1.$$

2. Вычислить ординату точки, лежащей на прямой, заданной уравнением $y=-2x+10$, если ее абсцисса равна 2.

3. Написать уравнение прямой, образующей с положительным направлением оси Ox угол 60° и проходящей через точку $(0, 5)$.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(4, -2)$ и наклоненной к оси Ox под углом 45°.

5. Написать уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку $(5, 2)$.

6. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(-4, 6)$.

7. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями

$$4x+2y-6=0, \quad -5x+3y+2=0.$$

8. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями

$$4x-3y+7=0, \quad 8x-6y+2=0.$$

9. Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями

$$4x-3y+7=0, \quad 8x-6y+14=0.$$

ГЛАВА III

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Парабола

Рассмотрим уравнение

$$y=x^2. \qquad (1)$$

Если x и y рассматривать как координаты точки, то уравнение (1) определит некоторое геометрическое место точек. Исследуем вид этого геометрического места. Заметим, что наше исследование будет неполным, так как останутся вопросы, которые нами пока не будут выяснены. Чем дальше мы будем продвигаться в изучении математики, тем полнее будут проводиться исследования.

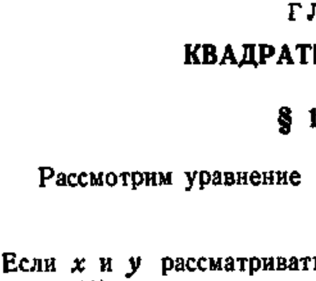

Рис. 18.

1) Так как x^2 при любом значении x всегда неотрицательно, то y, определяемое уравнением (1), всегда неотрицательно. Значит, любая точка, принадлежащая изучаемому геометрическому месту, не будет лежать ниже оси Ox (рис. 18).

2) Так как и для $-x$ и для x после возведения в квадрат получается одно и то же число, то точки, принадлежащие геометрическому месту и соответствующие значениям $-x$ и x, имеют одну и ту же ординату и поэтому расположены симметрично относительно оси Oy (рис. 19).

3) Если x положительно, то, чем больше x, тем больше и x^2. Поэтому по мере возрастания абсолютной величины абсциссы величина ординаты тоже возрастает. Следовательно,

точки геометрического места удаляются от начала координат вправо вверх и влево вверх.

Геометрическое место, определяемое уравнением $y=x^2$, называется параболой и имеет вид, изображенный на рис. 20. Эту кривую линию называют также графиком функции $y=x^2$. Точка (0, 0) принадлежит геометрическому месту, поэтому можно сказать, что парабола проходит через начало координат. Эту точку называют вершиной параболы. Часть параболы, расположенная в первой четверти, и часть параболы, расположенная во второй четверти, называются ее ветвями.

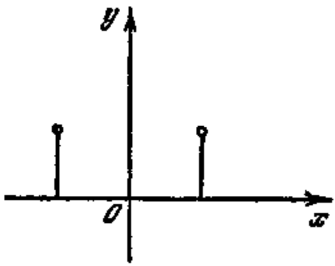

Рис. 19.

Теперь рассмотрим уравнение

$$y=-x^2. \tag{2}$$

Оно определяет геометрическое место точек. Сравнивая уравнения (1) и (2), замечаем, что при одном и том же x значения y отличаются только знаками, именно y, полученный из уравнения (2), всегда неположителен. Поэтому уравнение (2) тоже определяет параболу, вершина которой также находится в точке (0, 0), но ветви этой

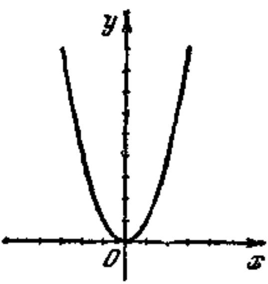

Рис. 20.

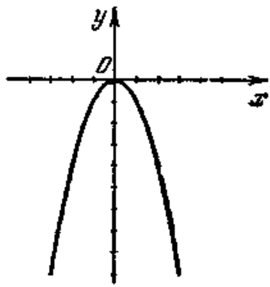

Рис. 21.

параболы идут от начала координат вниз вправо и вниз влево. График функции (2) изображен на рис. 21.

Перейдем к рассмотрению уравнения

$$y=ax^2. \tag{3}$$

Сравним его с уравнением (1).

Если a положительно и больше единицы, то очевидно, что при одном и том же значении x величина y из уравнения (3) будет больше, чем величина y, взятая из уравнения (1). Отсюда можно заключить, что кривая, определяемая уравнением (3), отличается от параболы (1) только тем, что ординаты ее точек растянуты в a раз. Таким образом, кривая, определяемая уравнением (3), является более сжатой, чем парабола $y=x^2$. Эту кривую тоже называют параболой.

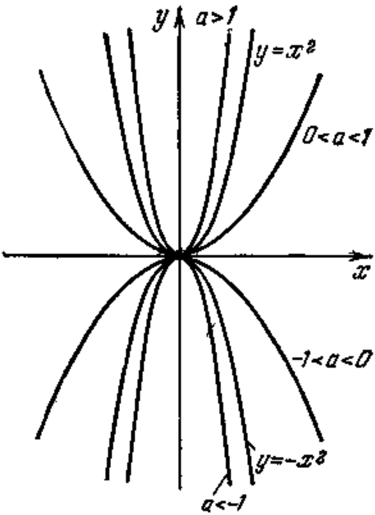

Рис. 22.

Если $0 < a < 1$, то получим параболу более раскрытую, чем парабола $y=x^2$. Для a отрицательного получаем аналогичные выводы, которые ясны из рис. 22.

Теперь покажем, что кривая, определяемая уравнением $y=ax^2+bx+c$, является параболой, только ее расположение относительно координатных осей другое, чем в разобранных случаях. Предварительно рассмотрим параллельный перенос осей координат.

§ 2. Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости дана система координат xOy (рис. 23). Рассмотрим новую систему координат $\overline{xOy}$. Предположим, что новая ось $\overline{Ox}$ параллельна старой оси Ox и новая ось $\overline{Oy}$ параллельна старой оси Oy. Начало координат новой системы — точка $\overline{O}$. Масштаб и направление осей одинаковы в старой и новой системах координат.

Обозначим координаты нового начала $\overline{O}$ относительно старой системы координат через x_0 и y_0, так что $x_0 = OK = L\overline{O}$; $y_0 = OL = K\overline{O}$. Возьмем произвольную точку M на плоскости; пусть ее координаты в старой системе будут

x и y, а в новой $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Тогда $x=OA$, $y=OB$, $\overline{x}=\overline{OA}$, $\overline{y}=\overline{OB}$ и (на основании формулы (2) из § 1 гл. I)

$$x=OA=OK+KA=OK+\overline{OA}=x_0+\overline{x},$$
$$y=OB=KB=KO+\overline{OB}=OL+\overline{OB}=y_0+\overline{y}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\overline{x},\\ y&=y_0+\overline{y}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Переход от старой системы координат к указанной новой называется *параллельным переносом* или *параллельным сдвигом* осей координат. Приходим к выводу:

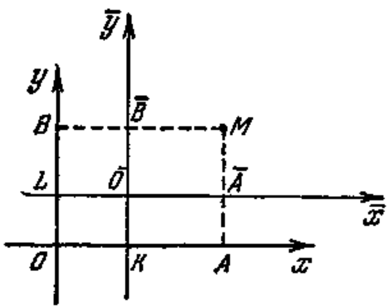

Рис. 23.

При параллельном сдвиге осей координат старая координата точки равна новой координате той же точки плюс координата нового начала в старой системе.

§ 3. Исследование функции $y=ax^2+bx+c$

Функция, определенная уравнением

$$y=ax^2+bx+c, \qquad (1)$$

называется *квадратичной* функцией. Функция $y=ax^2$, рассмотренная выше, является частным случаем квадратичной функции. Поставим перед собой цель — выяснить, как изменится уравнение (1), если перейти к новым координатам. Возьмем новые оси координат так, чтобы они были параллельны старым, т. е. ось $\overline{O}\overline{x}$ будет параллельна оси Ox, а ось $\overline{O}\overline{y}$ — оси Oy. Масштаб и направление осей такие же, как и у старых. Пусть координаты нового начала в старой системе будут x_0 и y_0. Подставим в уравнение (5) вместо x и y их выражения через новые координаты: $x=\overline{x}+x_0$, $y=\overline{y}+y_0$. Получим $\overline{y}+y_0=a(\overline{x}+x_0)^2+b(\overline{x}+x_0)+c$. Разрешив это уравнение относительно $\overline{y}$, будем иметь

$$\overline{y}=a\overline{x}^2+(2ax_0+b)\overline{x}+(ax_0^2+bx_0+c-y_0). \qquad (2)$$

Координаты нового начала находятся в нашем распоряжении, поэтому их можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$2ax_0+b=0, \quad ax_0^2+bx_0+c-y_0=0.$$

В этих уравнениях два неизвестных: x_0 и y_0. Найдем их:

$$x_0=-\frac{b}{2a},$$

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c=a\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c;$$

$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Если взять новое начало в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, то в уравнении (2) скобки $(2ax_0+b)$ и $(ax_0^2+bx_0+c-y_0)$ сделаются равными нулю, т. е. уравнение (2) примет вид

$$\overline{y}=a\overline{x}^2. \qquad (3)$$

Полученное уравнение имеет вид, рассмотренный выше. Таким образом, уравнение $y=ax^2+bx+c$ относительно новой системы координат определяет ту же параболу, что и уравнение $\overline{y}=a\overline{x}^2$. Приходим к выводу:

Уравнение $y=ax^2+bx+c$ *определяет параболу, вершина которой находится в точке* $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ *и ветви которой направлены вверх, если* $a>0$, *и вниз, если* $a<0$.

Тот же вывод можно высказать по-другому:

График квадратической функции есть парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}, \ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, *ветви которой направлены вверх, если* $a>0$, *и вниз, если* $a<0$.

Пример 1. Выяснить вид и расположение параболы, заданной уравнением

$$y=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x. \tag{4}$$

Переносим начало координат в точку (x_0, y_0), координаты которой пока неизвестны. Старые координаты x, y выражаются через новые $\bar{x}$, $\bar{y}$ по формулам

$$x=\bar{x}+x_0, \quad y=\bar{y}+y_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4), получим:

$$\bar{y}+y_0=\frac{3}{8}(\bar{x}+x_0)^2-\frac{3}{2}(\bar{x}+x_0),$$

$$\bar{y}=\frac{3}{8}\bar{x}^2+\left(\frac{3}{4}x_0-\frac{3}{2}\right)\bar{x}+\left(\frac{3}{8}x_0^2-\frac{3}{2}x_0-y_0\right).$$

Выберем координаты нового начала так, чтобы соблюдались равенства

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_0-\frac{3}{2}=0, \\ \frac{3}{8}x_0^2-\frac{3}{2}x_0-y_0=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, будем иметь:

$$x_0=2, \quad y_0=\frac{3}{8}\cdot 2^2-\frac{3}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}.$$

Следовательно, перенося начало координат в точку $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, преобразуем уравнение (4) в новое уравнение, которое имеет вид

$$\bar{y}=\frac{3}{8}\bar{x}^2. \tag{5}$$

Следовательно, уравнение (4) определяет параболу, имеющую вершину в точке $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$; ветви параболы направлены вверх (рис. 24).

Приведем пример применения квадратичной функции в механике.

Задача 1. Найти траекторию тела, брошенного под углом к горизонту. Угол бросания α, скорость бросания v_0. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение. Выберем оси координат так: ось Oy — вертикальная прямая, проведенная в точке бросания, ось Ox — горизонтальная прямая, начало координат — точка бросания (рис. 25).

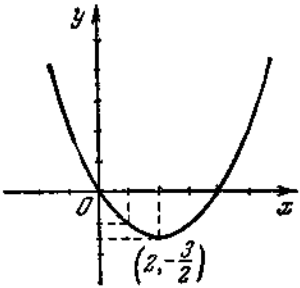

Рис. 24.

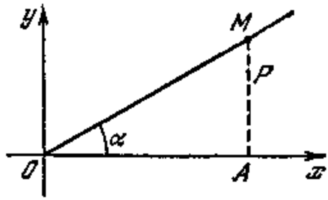

Рис. 25.

Если бы не действовала сила притяжения Земли, то тело, брошенное под углом к горизонту, по инерции двигалось бы по прямой OM. За t *сек* оно прошло бы расстояние $s = OM = v_0 t$ и, стало быть, находилось бы в точке M. Но под действием силы притяжения Земли это тело, как свободно падающее, за t *сек* пройдет вниз путь $MP = \frac{gt^2}{2}$, следовательно, тело фактически будет в точке P. Вычислим координаты точки P:

$$x = OA = OM \cos\alpha = v_0 t \cos\alpha, \qquad (*)$$

$$y = AP = AM - PM = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (**)$$

Найдем уравнение, связывающее x с y. Для этого из уравнения (*) найдем t и подставим это выражение в уравнение (**): $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ и, следовательно,

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha},$$

или

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2. \qquad (***)$$

Мы получили уравнение траектории тела. Как мы видим, это есть квадратичная функция рассмотренного вида, следовательно, тело, брошенное под углом к горизонту, движется в безвоздушном пространстве по параболе, расположенной вершиной вверх, поскольку коэффициент при x^2 отрицателен.

Какова наибольшая высота подъема тела над Землей? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти вершину параболы. Как было выведено, вершина параболы имеет координаты

$$x=-\frac{b}{2a}, \quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

В нашей задаче $a=-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, $b=\operatorname{tg}\alpha$ и $c=0$, поэтому координаты вершины равны

$$x=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{2g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g},$$

$$y=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot 2v_0^2\cos^2\alpha}{4g}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Найдем теперь дальность полета тела, т. е. абсциссу точки падения. Для этого приравняем в уравнении (***) y нулю, получим уравнение

$$x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,$$

решая которое найдем два значения x: $x_1=0$ и $x_2=2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha=v_0^2\sin 2\alpha$; первое из них дает точку бросания, а второе — искомую абсциссу точки падения.

Все эти рассуждения относятся к безвоздушному пространству; в воздухе и высота и дальность будут значительно меньше.

Упражнения к гл. III

1. Новые оси координат параллельны старым и новое начало находится в точке (4, 1). Найти координаты точек в новой системе, если известны их старые координаты: $A\,(6,\ 2)$, $B\,(4,\ -1)$, $C\,(0,\ +1)$, $D\,(3,\ -2)$.

2. Построить параболы:

$$\text{а) } y=\frac{1}{5}x^2, \quad \text{б) } y=-\frac{1}{5}x^2.$$

3. Найти вид и расположение параболы $y=x^2-2x+2$ (делать так же, как в примере, указанном в тексте).

4. Найти вершину параболы $y=-4(x^2+4x+4)$ (воспользоваться выведенными формулами).

5. Найти вид и расположение параболы $y=-3x^2-24x-50$.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ И ПРОСТЫЕ НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции. Радианная мера угла

Прежде чем рассматривать тригонометрические функции, напомним, что такое радианная мера угла.

Радианной мерой центрального угла называется отношение длины дуги, на которую он опирается, к радиусу окружности. Если R — длина радиуса, l — длина дуги, то радианная мера дуги x выразится так:

$$x=\frac{l}{R}. \tag{1}$$

Так как l и R измеряются линейными единицами, то из (1) следует, что x — число отвлеченное.

Из геометрии известно, что

$$l=\frac{2\pi R a^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi R a}{180},$$

где a — градусная мера центрального угла, опирающегося на дугу l. Поэтому радианная мера угла a° будет

$$x=\frac{l}{R}=\frac{\pi a}{180}. \tag{2}$$

Находя a из формулы (2), получим выражение градусной меры угла через радианную:

$$a^\circ=\frac{180^\circ x}{\pi}. \tag{3}$$

Пример 1. Найти радианную меру угла 30°. Подставляя в формулу (2) вместо a число 30, найдем

$$x=\frac{\pi\cdot 30}{180}=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Найти градусную меру угла, радианная мера которого равна 0,8. Подставляя в формулу (3) $x=0{,}8$, находим

$$a^\circ=\frac{180^\circ\cdot 0{,}8}{\pi},$$

или приближенно, полагая $\pi\approx 3{,}14$, найдем $a^\circ\approx 45^\circ 50'$.

Так как $\frac{\pi}{180}$ — постоянное число, то формула (2) устанавливает прямую пропорциональность между числами x и a.

В тригонометрии, помимо положительных углов, вводятся и отрицательные, поэтому радианная мера угла может быть и отрицательной. Например, угол —90° имеет радианную меру $-\frac{\pi}{2}$.

График функции $y=\sin x$

При построении графиков тригонометрических функций можно обойтись без таблиц. Для этого надо поступить так (рис. 26):

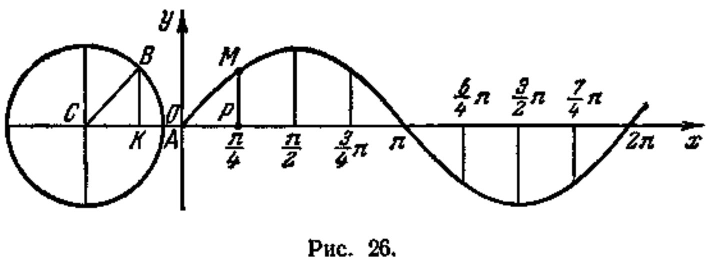

Рис. 26.

1. Возьмем окружность единичного радиуса и от точки A отложим на окружности в направлении, противоположном движению часовой стрелки, дугу AB, длину которой обозначим x. Тогда радианная мера угла $\angle ACB$ будет численно равна x. Построим линию синуса этого угла; она изобра-

зится отрезком KB. Так как $R=1$, то синус угла, найденный как отношение $\frac{KB}{R}$, численно равен длине отрезка KB.

2. Возьмем оси координат (рис. 26). На оси Ox отложим отрезок OP, длина которого равна длине x дуги AB. Отрезок PM, перпендикулярный оси, возьмем равным длине отрезка KB. Тогда $PM=KB=\sin x$. Следовательно, точка M имеет координаты x и $\sin x$. Проделав это построение для различных дуг, получим ряд точек, лежащих на графике функции $y=\sin x$. На рис. 26 построены точки, соответствующие дугам:

$$0, \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{4}\pi, \pi, \quad \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi, \quad 2\pi.$$

Функция $\sin x$ периодическая и имеет период 2π. Это значит, что для любого значения x выполняется равенство

$$\sin(x+2\pi)=\sin x.$$

График функции $y=\sin \omega x$

При изменении аргумента от 0 до 2π синус принимает все значения от -1 до $+1$. При дальнейшем увеличении аргумента значения синуса в силу периодичности повторяются.

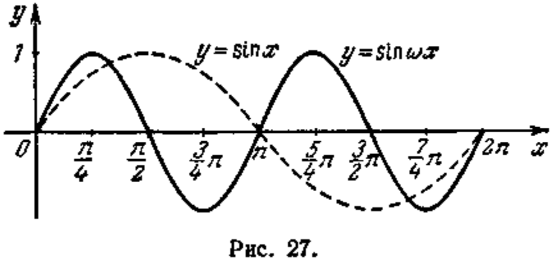

Рис. 27.

Если рассмотрим функцию $y=\sin \omega x$, то при изменении аргумента ωx от 0 до 2π функция $\sin \omega x$ примет все значения от -1 до $+1$. При дальнейшем увеличении аргумента ωx значения $\sin \omega x$ будут повторяться.

Найдем период функции $\sin \omega x$. Так как значения функции начнут повторяться с того момента, когда аргумент ωx

станет равным 2π, то период найдется из равенства $\omega x = 2\pi$. Отсюда получаем, что $x = \frac{2\pi}{\omega}$. Следовательно, $\frac{2\pi}{\omega}$ есть период функции $\sin \omega x$. В самом деле,

$$\sin \omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin (\omega x + 2\pi) = \sin \omega x.$$

Поэтому функция $y = \sin \omega x$ имеет график, изображенный на рис. 27. Если $\omega > 1$, то график $y = \sin \omega x$ сжимается по сравнению с графиком $y = \sin x$. Если же $0 < \omega < 1$, то график растягивается (на рис. 27 $\omega = 2$).

График функции $y = \sin (x - \varphi)$

Перейдем от старых осей координат к новым, начало которых находится в точке $(\varphi, 0)$. Старые координаты выражаются через новые так (см. § 2 гл. III):

$$x = \bar{x} + \varphi, \quad y = \bar{y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение $y = \sin (x - \varphi)$, получим $\bar{y} = \sin \bar{x}$, т. е. график функции $\bar{y} = \sin \bar{x}$ в новой системе координат выглядит так же, как график функции

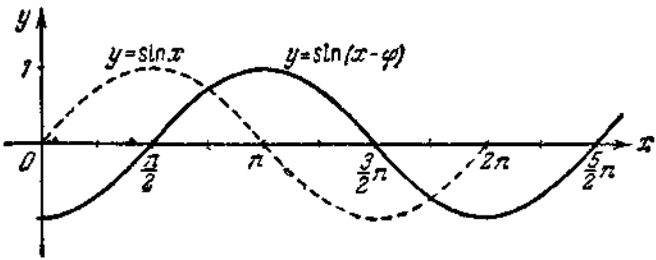

Рис. 28.

$y = \sin (x - \varphi)$ в старой системе координат. Следовательно, график функции $y = \sin (x - \varphi)$ в старой системе координат можно получить, сдвигая график $y = \sin x$ на φ вправо, если $\varphi > 0$, и влево, если $\varphi < 0$ $\left(\text{на рис. 28 } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = A\sin x$

Если $A > 0$, то каждая ордината на графике $y = A\sin x$ имеет то же направление, что и ордината точки, лежащей на графике $y = \sin x$, только ее длина умножается на число A. При этом, если $A > 1$, то ордината увеличивается, если же

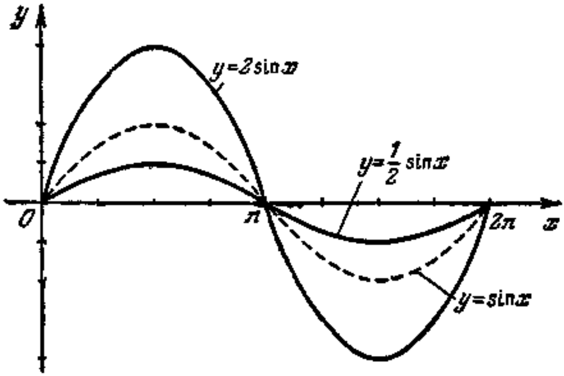

Рис. 29.

$A < 1$, то уменьшается. При $A < 0$ ордината изменяет направление на противоположное. На рис. 29 изображены графики функций $y = 2\sin x$ и $y = \frac{1}{2}\sin x$.

Таким образом, уравнение $y = A\sin\omega(x - \varphi)$ определяет на плоскости кривую линию, называемую синусоидой. Коэффициент ω, называемый *частотой*, влияет на растяжение синусоиды в направлении оси Ox. При этом, если $0 < \omega < 1$, то синусоида растягивается, если же $\omega > 1$, то сжимается. Коэффициент φ называется *фазой*; его величина влияет на сдвиг синусоиды, как целого, вдоль оси Ox. Если φ положителен, то сдвиг производится вправо, если же φ отрицателен, то — влево. Коэффициент A называется *амплитудой*, его величина влияет на растяжение синусоиды в направлении оси Oy.

На рис. 30 показано последовательное построение графика функции $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Сверху изображен график функции $y = \sin x$, ниже — график функции $y = \sin 2x$, еще ниже — график $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и в самом низу —

график функции $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. На всех четырех графиках точки, имеющие одну и ту же абсциссу, лежат на одной вертикальной прямой.

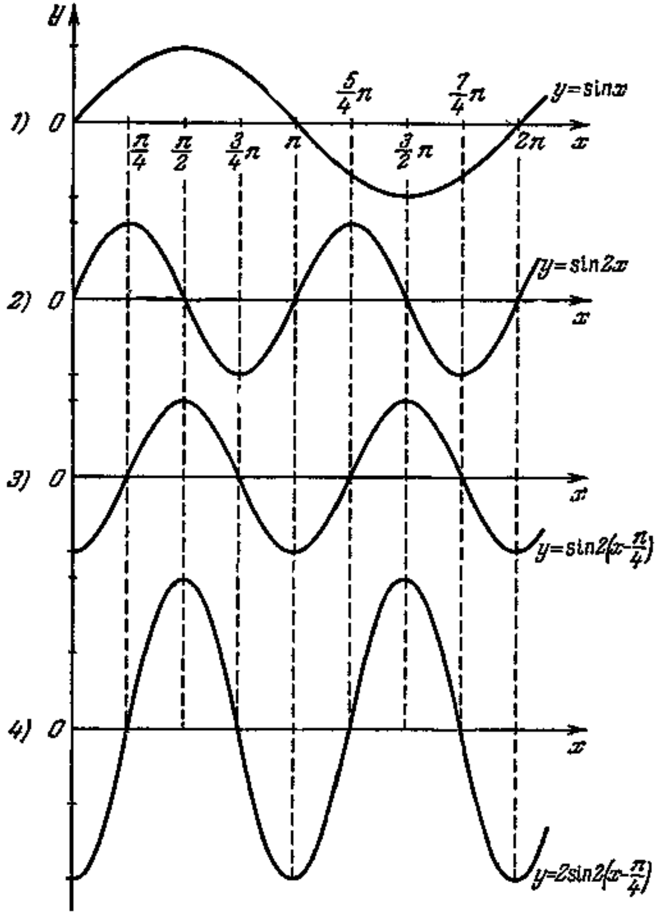

Рис. 30.

Указанный метод построения синусоид может быть использован и для построения косинусоид. Приведем пример.

Пример 3. Построим график функции $y = -2\cos 2x$. Применяя формулы приведения, известные из тригонометрии будем иметь

$$y = -2\cos 2x = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Этот график уже построен на рис. 30, *4*.

§ 2. Показательная функция

Если величины x и y связаны уравнением $y = a^x$ (где $a > 0$), то величина y называется *показательной* функцией от x. Возьмем для примера $a = 2$, тогда $y = 2^x$. Будем давать x значения, равные нулю и целым положительным числам, тогда y будет принимать значения, указанные в таблице:

x	0	1	2	3	4	...	10	11	...	20
y	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	4	8	16	...	1024	2048	...	1 048 576

Мы видим, что если придавать независимому переменному значения, увеличивающиеся в арифметической прогрессии, то y будет расти в геометрической прогрессии со знаменателем, равным 2.

Вообще, если в уравнении $y = a^x$ независимое переменное увеличивается в арифметической прогрессии, то функция y возрастает в геометрической прогрессии с знаменателем a. Если независимое переменное уменьшать, придавая ему целые отрицательные значения, то y будет уменьшаться в геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{a}$. В самом деле, взяв уравнение $y = 2^x$, составим таблицу:

x	-1	-2	-3	-4	...	-10	-11	...	-20
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	...	$\frac{1}{1\,048\,576}$

Приняв x за абсциссу, а y за ординату точки, построим точки, полученные в таблицах, и соединим их плавной кривой. Тогда получим кривую линию, изображенную на рис. 31. Эта линия называется графиком показательной функции.

Отметим, что показательная функция нигде не обращается в нуль, т. е. ее график нигде не пересекает ось Ox.

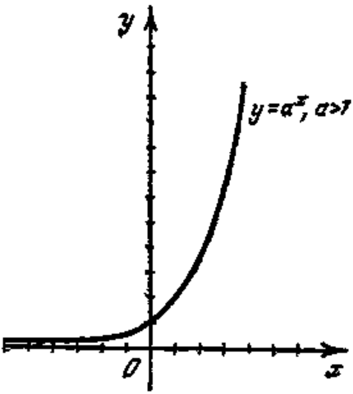

Рис. 31.

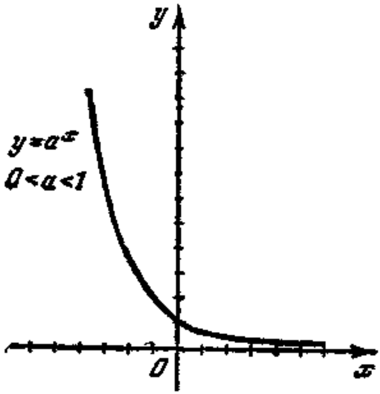

Рис. 32.

Аналогичный график имеет и любая показательная функция с основанием, большим единицы ($a > 1$).

Если же взять основание положительное, но меньшее единицы ($0 < a < 1$), то график будет иметь вид, изображенный на рис. 32.

§ 3. Логарифмическая функция

Если величины x и y связаны уравнением $y = \log_a x$, то y называют *логарифмической* функцией от x. Возьмем $a = 10$ и будем придавать независимому переменному x значения, равные целым положительным числам. Составим для значений y таблицу:

x	1	10	100	1000	10 000	...	100 000 000	...	10^n	...
y	0	1	2	3	4	...	8		n	...

Заметим, что в этой таблице значения x растут в геометрической прогрессии, в то время как значения y растут в арифметической прогрессии. Это будет иметь место во всех случаях, когда a больше единицы. Если x давать значения, образующие убывающую геометрическую прогрессию с положительными членами, то y будет принимать значения убывающей арифметической прогрессии, как это видно из таблицы:

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	...	$\frac{1}{100\,000\,000}$	...	10^{-n}	...
y	-1	-2	-3	-4	...	-8	...	$-n$	...

Напомним, что отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов, точнее, они не имеют действительных логарифмов.

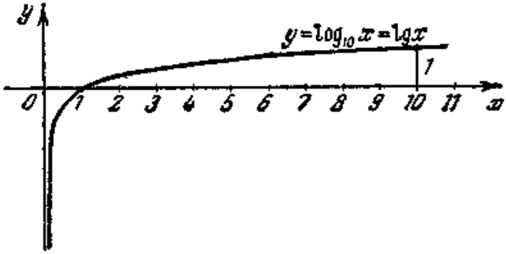

Рис. 33.

При $a>1$ график функции $y=\log_a x$ имеет вид, указанный на рис. 33 ($a=10$).

§ 4. Некоторые простые неявные функции

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{I}$$

в котором коэффициенты A, B, C, D, E, F — заданные числа. Это уравнение можно разрешить относительно y. Полученное выражение y через x будет достаточно сложным. Поскольку из уравнения (I) мы найдем выражение y через x, то можно сказать, что уравнение (I) определяет y как функцию x.

Это обычно выражают так: уравнение (I) определяет y как *неявную* функцию x.

Например, уравнение $x^2+y^2=1$ (*) определяет неявную функцию. Разрешая его относительно y, получим

$$y=+\sqrt{1-x^2} \qquad (**)$$

и

$$y=-\sqrt{1-x^2}. \qquad (***)$$

Таким образом, уравнение (*), определяющее неявную функцию, на самом деле определило две функции: (**) и (***). В таких случаях говорят также, что уравнение (*) определяет двузначную функцию.

Приведем несколько частных случаев уравнения (I) и дадим соответствующие геометрические иллюстрации.

1. Окружность

Рассмотрим уравнение

$$x^2+y^2=R^2, \qquad (1)$$

которое получается из уравнения (I), если положить $A=C=1$, $B=D=E=0$, $F=-R^2$.

Если в формулу, выражающую расстояние между двумя точками (формула (1) из § 2 гл. I), подставить $x_1=y_1=0$, $x_2=x$, $y_2=y$, то получим $OQ=\sqrt{x^2+y^2}$.

Из уравнения (1) находим, что $\sqrt{x^2+y^2}=R$, т. е. $OQ=R$. Это значит, что все точки $Q(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), находятся на расстоянии R от начала координат. Следовательно, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), есть окружность радиуса R с центром в начале координат. Аналогично получаем, что уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в точке (a, b).

Пример 1. Найдем уравнение окружности с центром в точке $(2, -3)$ и радиусом, равным 10. Полагая $a=2$, $b=-3$, $R=10$, получим $(x-2)^2+(y+3)^2=100$.

Разрешим это уравнение относительно y; будем иметь

$$y=-3+\sqrt{100-(x-2)^2}$$

и

$$y=-3-\sqrt{100-(x-2)^2}.$$

Первое из этих уравнений есть уравнение верхней половины окружности, второе — нижней.

2. Эллипс

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

где a и b — заданные положительные числа. Решая его относительно y, получим:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Отсюда видно, что уравнение (2) определяет две функции.

Пока независимое переменное x по абсолютной величине меньше a, подкоренное выражение положительно, корень имеет два значения.

Каждому значению x, удовлетворяющему неравенству $-a\leqslant x\leqslant a$, соответствуют два значения y, равных по абсолютной величине. Значит, геометрическое место точек, определяемое уравнением (2), симметрично относительно оси Ox. Так же можно убедиться в том, что оно симметрично и относительно оси Oy. Поэтому ограничимся рассмотрением только первой четверти.

При $x=0$ $y=b$, при $x=a$ $y=0$. Кроме того, заметим, что если x увеличивается, то разность a^2-x^2 уменьшается; стало быть, точка (x, y) будет перемещаться от точки $B(0, b)$ вправо вниз и попадет в точку $A(a, 0)$. Из соображений симметрии изучаемое геометрическое место точек будет иметь вид, изображенный на рис. 34.

Полученная линия называется *эллипсом*. Число $2a$ является длиной отрезка A_1A, число $2b$ — длиной отрезка B_1B. Числа a и b называются полуосями эллипса. Число $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситетом.

Задача 1. Найти проекцию окружности на плоскость, не совпадающую с плоскостью окружности.

Решение. Возьмем две плоскости, пересекающиеся под углом α (рис. 35). В каждой из этих плоскостей возьмем систему координат, причем за ось Ox примем прямую пересечения плоскостей, стало быть, ось Ox будет общей для обеих систем. Оси ординат различны, начало координат общее для обеих систем. В плоскости Π_1 возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат, ее уравнение $\bar{x}^2+\bar{y}^2=R^2$ (*).

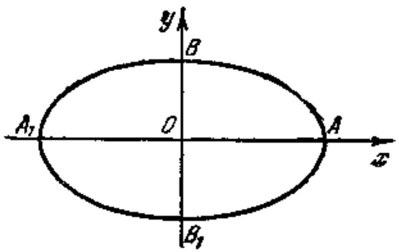

Рис. 34.

Пусть точка $M(\bar{x}, \bar{y})$ лежит на этой окружности, тогда ее координаты удовлетворяют уравнению (*).

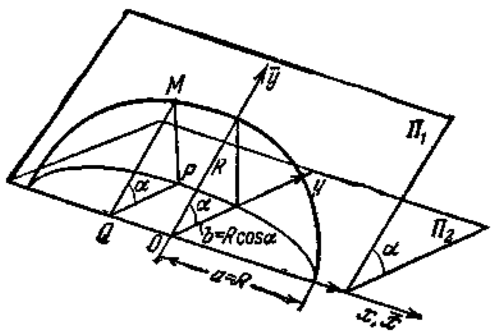

Рис. 35.

Обозначим проекцию точки M на плоскость Π_2 буквой P, а координаты ее — через x и y. Опустим перпендикуляры из P и M на ось Ox, это будут отрезки QP и QM. Треугольник PQM прямоугольный, в нем $QP=y$, $QM=\overline{y}$, $\angle PQM=\alpha$, следовательно, $\overline{y}=QM=\frac{y}{\cos\alpha}$. Абсциссы точек M и P равны, т. е. $x=\overline{x}$. Подставим в уравнение (*) значение $\overline{y}=\frac{y}{\cos\alpha}$, тогда

$$x^2+\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=R^2,$$

или

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y}{(R\cos\alpha)^2}=1,$$

а это есть уравнение эллипса с полуосями $a=R$ и $b=R\cos\alpha$.

Таким образом, ***эллипс является проекцией окружности на плоскость, расположенную под углом к плоскости окружности.***

Замечание. Окружность можно рассматривать как эллипс с равными полуосями.

3. Гипербола

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Решая его относительно y, получим две явные функции

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

или одну двузначную функцию

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Функция y имеет действительные значения только в том случае, если $x^2\geqslant a^2$. При $x^2<a^2$ функция y действительных значений не имеет. Следовательно, если $-a<x<a$, то точек с координатами, удовлетворяющими уравнению (3), не существует.

При $x=\pm a$ получаем $y=0$.

При $x^2>a^2$ каждому значению x соответствуют два значения y, поэтому кривая симметрична относительно оси Ox. Так же можно убедиться в симметрии относительно оси

Oy. Поэтому в рассуждениях можно ограничиться рассмотрением только первой четверти. В этой четверти при увеличении x значение y будет также увеличиваться (рис. 36).

Кривая, все точки которой имеют координаты, удовлетворяющие уравнению (3), ***называется гиперболой.***

Гипербола в силу симметрии имеет вид, указанный на рис. 37.

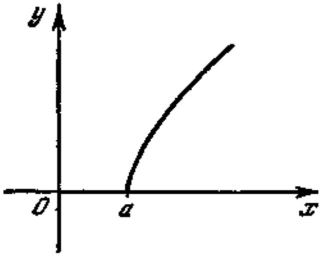

Рис. 36.

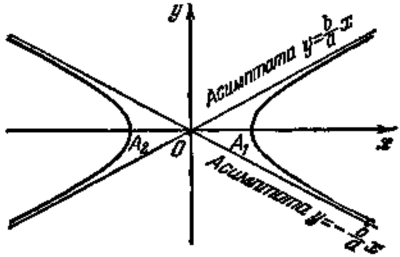

Рис. 37.

Точки пересечения гиперболы с осью *Ox* называются вершинами гиперболы; на рис. 37 они обозначены буквами A_1 и A_2.

Часть гиперболы, расположенная в первой и четвертой четвертях, называется правой ветвью, а часть гиперболы, расположенная во второй и третьей четвертях, — левой ветвью.

Рассмотрим прямую, заданную уравнением $y=\frac{b}{a}x$. Чтобы не смешивать ординату точки, расположенной на этой прямой, с ординатой точки, расположенной на гиперболе, будем обозначать ординату точки на прямой $y_п$, а ординату точки на гиперболе через $y_г$. Тогда $y_п=\frac{b}{a}x$, $y_г=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (рассматриваем только кусок правой ветви, расположенной в первой четверти). Найдем разность ординат точек, взятых на прямой и на гиперболе при одинаковых абсциссах:

$$y_п-y_г=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=$$
$$=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Умножим и разделим правую часть на $x+\sqrt{x^2-a^2}$:

$$y_п-y_г=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

или

$$y_п-y_г=\frac{b}{a}\frac{x^2-\sqrt{(x^2-a^2)^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Окончательно

$$y_п-y_г=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}. \tag{*}$$

Будем придавать x все большие и большие значения, тогда правая часть равенства (*) будет становиться все меньше и меньше, приближаясь к нулю. Следовательно, разность $y_п-y_г$ будет приближаться к нулю, а это значит, что точки, расположенные на прямой и гиперболе, будут сближаться. Таким образом, можно сказать, что рассматриваемая часть правой ветви гиперболы по мере удаления от начала координат приближается к прямой $y=\frac{b}{a}x$. Вследствие симметрии видно, что часть правой ветви, расположенная в четвертой четверти, будет приближаться к прямой, определяемой уравнением $y=-\frac{b}{a}x$. Также кусок левой ветви, расположенный во второй четверти, приближается к прямой $y=-\frac{b}{a}x$, а кусок левой ветви, расположенный в третьей четверти, — к прямой $y=\frac{b}{a}x$.

Прямая, к которой неограниченно приближается гипербола при удалении от начала координат, называется асимптотой гиперболы.

Таким образом, гипербола имеет две асимптоты, определяемые уравнениями $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ (рис. 37).

Упражнения к гл. IV

1. Определить период функции:

а) $y=\sin 10x$;

б) $y=\sin\frac{x}{10}$;

в) $y=\cos 6x$.

2. В какую сторону и насколько сдвинута синусоида $y = \sin(x+5)$ относительно синусоиды $y = \sin x$?

3. В какую сторону и насколько сдвинута синусоида $y = \sin(4x - 20)$ относительно синусоиды $y = \sin x$?

4. Насколько отклоняется от оси Ox синусоида $y = \frac{1}{4} \sin 5x$?

5. Выяснить вид и расположение линий, определяемых неявными функциями:

а) $9x^2 + 16y^2 = 144$;

б) $9x^2 - 16y^2 = 144$;

в) $x^2 + 25x^2 + y^2 - 39 = 0$.

6. Определить асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{3} = 1$.

ГЛАВА V

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Примеры и определения

Мы уже встречались с понятием переменной величины, независимой переменной и функции, но рассматривали лишь простейшие случаи. Приведем еще примеры переменных и постоянных величин:

1. Наиболее часто встречающаяся переменная величина — время.

2. Переменной величиной является температура воздуха в течение суток.

3. Отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная — это число π.

4. Ускорение силы тяжести есть величина постоянная, однако это верно только при соблюдении определенных физических условий.

5. Температура кипения химически чистой воды постоянна и равна 100° C, но это верно при нормальном атмосферном давлении.

Таким образом, мы наблюдаем величины переменные, постоянные и условно постоянные.

Определение. *Две переменные величины называются связанными функциональной зависимостью, если каждому значению одной из них соответствует одно или несколько определенных значений другой.* Первая величина называется *независимой переменной*, а вторая — *зависимой переменной* или *функцией*. Если каждому значению независимой переменной соответствует одно значение функции, то функция называется *однозначной*, в противном случае — *многозначной*.

Линейная функция, все тригонометрические, показательная и логарифмическая функции являются однозначными.

Неявные функции, определяющие окружность, эллипс и гиперболу, — двузначные, т. е. многозначные.

Приведем еще примеры функций.

Имея электрическую цепь, в которую включены источник постоянного напряжения и сопротивление, мы можем, меняя величину сопротивления, получать различный ток. В этом примере напряжение V — постоянная величина, а сопротивление R и ток I — переменные. Связь между ними устанавливается законом Ома. Зависимость здесь записывается так: $I = \frac{V}{R}$.

В предыдущих параграфах мы уже встречались с графиками отдельных функций (см. гл. III, § 1 и гл. IV, §§ 1, 2, 3), но там не было дано общего определения графика функции. Теперь мы имеем возможность дать это определение.

Рассмотрим некоторую функцию. Возьмем любое возможное значение независимого переменного и обозначим его через x, а соответствующее ему значение функции — через y. Рассмотрим точку, абсцисса которой равна x, а ордината y, т. е. точку (x, y). Если будем менять значение x, то будут получаться новые точки. Совокупность всех полученных точек и назовем графиком функции. Иначе говоря,

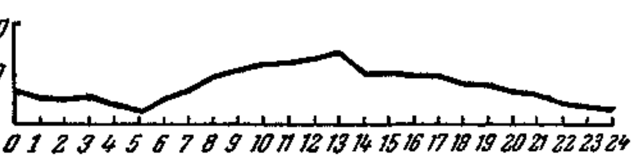

Рис. 38.

графиком функции называется геометрическое место точек, абсциссы которых равны значению независимого переменного, а ординаты — соответствующему значению функции.

Как видно, рассмотренные раньше графики подходят под это определение.

На рис. 38 дан график изменения температуры за сутки. Этот график позволяет узнать, какая температура была в определенный момент прошедших суток. Так, например, в 8 часов утра (находим на оси абсцисс точку с координатой 8) температура была 10 градусов по Цельсию (перпендикуляр, восставленный из найденной точки к оси абсцисс, в принятом масштабе имеет длину 10 единиц). Таким образом график, изображенный на рис. 38, устанавливает соответствие между каждым моментом времени и числом, дающим температуру в этот момент.

Замечание. Функцией называется не только зависимое переменное, но и закон или способ, устанавливающий соответствие между зависимым и независимым переменными. Например, если дана функция $y=x^3+\sqrt{x}$, то можно также сказать, что дана функция $x^3+\sqrt{x}$.

Существует несколько способов задания функций; наиболее часто функции задаются уравнениями, таблицами или графиками. Например, линейная функция задается уравнением; функция, дающая изменение температуры воздуха в течение дня, обычно задается графиком; зависимость угла прицеливания от расстояния дается таблицей.

Подобно тому, как в алгебре для обозначения чисел вводятся буквы, так и для функций в общем виде вводится следующее обозначение. Если y — функция, а x — независимое переменное, то будем писать

$$y=f(x).$$

Здесь f обозначает набор и порядок математических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень; нахождение логарифма, нахождение тригонометрических функций и т. д.). В записи около f ставят скобки, в которых пишут, над чем надо произвести указанные действия. Запись $y=f(x)$ читают так: y есть функция от x.

Пример 1. $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Здесь f обозначает: 1) возведи в третью степень; 2) прибавь единицу; 3) извлеки квадратный корень.

Пример 2. $y=f(x)=2\sin x$. Здесь f обозначает: 1) найди значение синуса; 2) умножь на два.

Пример 3. $y=f(x)=x^3+4x^2+5$. Здесь f обозначает: 1) возведи в третью степень; 2) возведи во вторую степень; 3) результат, полученный в предыдущем пункте, умножь на 4; 4) числа, полученные в пунктах 1 и 3, сложи; 5) прибавь число пять к полученному ранее.

Пример 4. Функция $f(x)$ определена так:
если $x<0$, то $f(x)=0$;
если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $f(x)=1$;
если $x>1$, то $f(x)=0$.

Хотя в этом примере не указано, при помощи каких математических действий и операций функция $f(x)$ выражается через x, тем не менее ее значения можно указать для любого x. Например, пусть $x=-3$, в этом случае выполняется неравенство $-3<0$, поэтому $f(-3)=0$. Если $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то выполняется неравенство $0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, и, следовательно, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$. Если $x=11{,}5$, то выполнено неравенство $11{,}5>1$, поэтому $f(11{,}5)=0$.

Функции такого типа, как только что показанная, встречаются не только в учебниках математики; они часто встречаются в современной физике и технике.

Рассмотрим схему, указанную на рис. 39. Здесь $Б$ обозначает источник постоянной электродвижущей силы (например, батарея), $В$ — выключатель, A — амперметр, R — сопротивление.

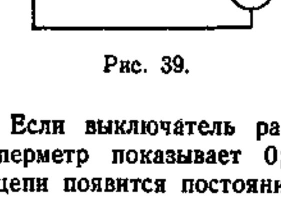

Рис. 39.

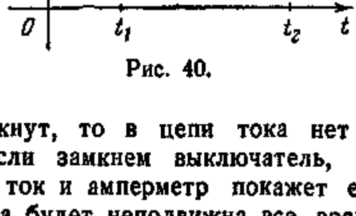

Рис. 40.

Если выключатель разомкнут, то в цепи тока нет и амперметр показывает 0; если замкнем выключатель, то в цепи появится постоянный ток и амперметр покажет его величину. Стрелка амперметра будет неподвижна все время до выключения выключателя.

Если на горизонтальной оси координат будем откладывать время t, а на другой оси величину тока i, то график этой функциональной зависимости будет выглядеть так, как указано на рис. 40. На этом рисунке t_1 обозначает момент включения тока, а t_2 — момент выключения.

Различных функций существует бесконечное множество, поэтому нельзя, да и не нужно, каждой из них давать определенное название. Но, однако, некоторым функциям, встречающимся очень часто, дают названия. Приведем некоторые из них: линейная, квадратичная, тригонометрическая, логарифмическая, показательная функции, степенной многочлен (или просто многочлен) вида $y=a_0x^n+ +a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

§ 2. Область существования функции

Определение. *Совокупность всех значений независимого переменного, для которых установлен закон или правило, позволяющее найти соответствующие значения функции, называется областью существования функции.*

Пример 1. Область существования функции $y=\frac{1}{x}$ состоит из всех действительных чисел, кроме нуля, поскольку на нуль делить нельзя.

Пример 2. Область существования функции $y=\sqrt{x}$ состоит из всех неотрицательных чисел. Отрицательные числа не входят в область существования, так как квадратный корень из отрицательного числа является числом комплексным, а комплексными числами мы не занимаемся.

Пример 3. Функция $y=\lg x$ имеет область существования, состоящую из всех положительных чисел, т. е. $x>0$.

Пример 4. $y=\frac{1}{x^2-1}$. Область существования этой функции — все действительные числа, кроме -1 и $+1$. Числа -1 и $+1$ не входят в область существования, так как при этих значениях знаменатель обращается в нуль, а на нуль делить нельзя.

Пример 5. $y=\frac{1}{\lg x}$. Область существования состоит из всех положительных чисел, кроме единицы.

§ 3. Функция от функции, или сложная функция

Часто при решении целого ряда задач приходится иметь дело с *«функцией от функции»*, которую называют иначе *сложной функцией*. Поясним на примерах, что под этим понимают.

Пример 1. Цель удаляется от орудия, ведущего по ней огонь. Расстояние «орудие—цель» есть функция времени. Наводчик в зависимости от расстояния ставит угол прицеливания. Итак, угол прицеливания является функцией расстояния «орудие—цель». Но так как расстояние «орудие—цель» уже есть функция времени, то и угол прицеливания будет функцией времени. Таким образом, угол прицеливания является сложной функцией, т. е. функцией от функции.

Пример 2. Даны функции $u=x^2$ и $y=u+u^2$. Функцию y можно рассматривать как функцию независимого переменного x. Действительно, подставляя вместо u его выражение $u=x^2$, получаем

$$y=x^2+(x^2)^2=x^2+x^4.$$

Здесь y есть функция от функции.

Пример 3. Рассмотрим функции $\varphi=1-u^2$ и $u=\sin t$. Можно сказать, что φ есть функция от функции и

$$\varphi=1-\sin^2 t=\cos^2 t.$$

Для дальнейшего очень важно уметь представлять сложную функцию в виде цепочки простых функций. Поясним на примерах, что это значит и как это делается.

Пример 4. Вычислим значение функции $y=\lg\cos x$, соответствующее значению $x=2\pi$. Для этого надо:

1) вычислить значение $\cos 2\pi$; $\cos 2\pi=1$;

2) вычислить $\lg 1$; он равен 0.

Для вычисления $y=\lg\cos x$ в этом примере надо было сделать два действия, или, как говорят, две операции. Эти две операции представляют сложную функцию $y=\lg\cos x$ в виде цепочки простых: $u=\cos x$ и $y=\lg u$. Два последних равенства эквивалентны заданному.

Пример 5. $y=\sin^3 2x$. Вычислим значение y, соответствующее $x=\frac{\pi}{6}$. Для этого: 1) умножим $\frac{\pi}{6}$ на 2, получим $\frac{\pi}{3}$; 2) находим $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) возводим $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в куб, получим $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

В этом примере для вычисления y сделаны три операции, которые позволяют сложную функцию $y=\sin^3 2x$ представить в виде цепочки трех функций: $u=2x$, $v=\sin u$, $y=v^3$.

В общем виде, если имеется сложная функция $y=f[\varphi(x)]$, ее можно представить в виде цепочки, состоящей из двух функций, а именно: $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$.

§ 4. Приращение функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ и дадим независимому переменному x определенное значение x_1; тогда функция y примет также определенное значение $y_1=f(x_1)$ (рис. 41). Если изменим значение независимого переменного на величину h, т. е. дадим ему значение $x_2=x_1+h$, то для этого значения функция примет, вообще говоря, другое значение $y_2=f(x_2)$. Это можно выразить следующими словами: независимому переменному x дано приращение h, равное $h=x_2-x_1$. При этом функция получает приращение $f(x_2)-f(x_1)$, которое обычно обозначают через Δy. Таким образом, имеем

$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1).$$

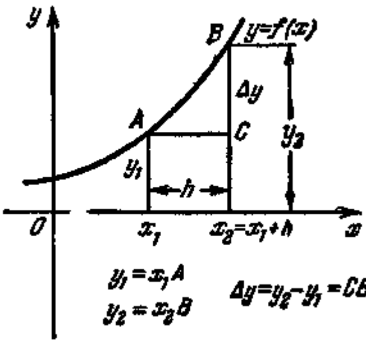

Рис. 41.

Надо отметить, что величина приращения функции Δy зависит как от выбора x, так и от выбора приращения h, т. е. приращение функции зависит от двух величин: x и h.

Пример 1. Вычислим: 1) приращение функции $y=x^2$, если $x=1$ и $h=\frac{1}{2}$, и 2) приращение этой же функции, если $x=0$, $h=\frac{1}{2}$.

1) Если $x_1=1$, то $y_1=x_1^2=1^2=1$; если $x_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, то $y_2=x_2^2=\frac{9}{4}$. Приращение Δy в этом случае равно

$$\Delta y=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}.$$

2) Если же $x_1=0$ и $h=\frac{1}{2}$, то $y_1=0^2=0$, $y_2=\left(0+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, поэтому

$$\Delta y=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}.$$

Упражнения к гл. V

1. Нарисовать график функции

$$\begin{cases} f(x)=0, & \text{если } x\neq 1; \\ f(1)=2. \end{cases}$$

2. Нарисовать график функции

$$\begin{cases} f(x)=-x, & \text{если } x<1; \\ f(x)=-1, & \text{если } x\geqslant 1. \end{cases}$$

3. Найти область существования функции:

а) $y=\dfrac{1}{16-x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}$;

б) $y=\log(x-1)$; д) $f(x)=\sqrt[3]{(x^3-1)^4}$;

в) $y=\sin 5x$; е) $f(x)=\sqrt{-x^2}$.

4. Найти приращение функции:

а) $y=x^3+1$ при $x=0$ и $h=1$;
б) $y=1-x^3$ при $x=0$ и $h=1$;
в) $y=x^2$ при $x=-2$ и $h=4$.

5. Найти приращение функции $y=\sin x$ при $x=\dfrac{\pi}{4}$ и $h=\dfrac{\pi}{4}$.

6. Представить сложную функцию $y=\sqrt{\log\sin x}$ в виде цепочки функций.

7. Чему равно приращение независимого переменного, если функция $y=2x^2$ получила приращение 2, а x было равно 1?

8. Какова функция, если она получает приращение, равное приращению независимого переменного?

ГЛАВА VI

ПРЕДЕЛЫ

Эту главу мы начнем с примеров, показывающих, в каком смысле будут употребляться слова «стремится», «приближается», «равно», «сделался равным» и какая разница в понятиях, выражаемых этими словами.

§ 1. Примеры

Пример 1. Поезд идет из Голицина в Москву. В этом случае говорят, что поезд приближается к Москве, или что расстояние поезда от Москвы стремится к нулю, или что расстояние приближается к нулю. Если поезд придет в Москву, то расстояние между поездом и Москвой станет равным нулю.

Пример 2. Если химически чистая вода нагревается при нормальном атмосферном давлении, то ее температура повышается и по мере нагревания доходит до 100° С. Вода закипает. После этого температура воды при дальнейшем нагревании не меняется. В этом случае мы будем говорить, что по мере нагревания температура воды увеличивается и приближается к 100°. При достижении этой температуры и во время кипения, несмотря на подачу тепла, температура остается постоянной.

Пример 3. Возьмем отрезок, лежащий на оси Ox и имеющий начало в точке $O(0)$, а конец в точке $A(1)$. Пусть точка $M(x)$ выходит из точки O и движется все время по направлению к точке A и, наконец, приходит в нее. Абсцисса точки M при этом все время изменяется. Можно сказать, что абсцисса приближается или стремится к единице, до тех пор пока точка M не придет в точку A. В тот момент, когда. точка M придет в точку A, скажем, что абсцисса x

сделалась равной единице или абсцисса достигла значения единицы.

Пример 4. Резиновый стержень растягивается при помощи приложенной к нему силы. Пока сила не очень велика, стержень, сохраняя целость, будет увеличиваться в длине. Если же сила увеличится до определенной величины, то стержень разорвется. Здесь будем говорить так: под влиянием растягивающей силы длина стержня увеличивается, стремясь к определенной величине, но эта длина не достигается, так как в тот момент, когда эта длина должна быть достигнута, стержень разорвется, т. е. перестанет существовать.

Пример 5. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$. Будем давать независимому переменному x различные значения, например: 10, 100, 1000, 10 000 и т. д., т. е. 10^n, где n — любое целое положительное число. Тогда y будет принимать следующие значения: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д. Здесь по мере увеличения n значение x будет увеличиваться и при n достаточно большом x может сделаться больше любого числа.

Этот факт будем выражать словами так:

Независимое переменное x неограниченно возрастает.

Так как значения y равны $\frac{1}{10^n}$, то при увеличении n y приближается к нулю, или y стремится к нулю. В этом случае мы имеем:

При неограниченном возрастании независимого переменного функция стремится к нулю.

Конечно, x может принимать при возрастании и другие значения, кроме указанных, например: 1, 2, 3, 4, 5, ... или 2, 4, 8, 16, 32, ...; но функция y при этом все же приближается к нулю.

Пример 6. Рассмотрим функцию $y=x^2+1$. Пусть x стремится к нулю, т. е. значения x могут быть выбраны по абсолютной величине как угодно малыми, тогда и x^2 будет уменьшаться и приближаться к нулю. Поэтому $y=x^2+1$ будет приближаться, или стремиться, к единице.

Все рассмотренные примеры были очень просты, и для их понимания не требовалось почти никаких знаний. Теперь приведем более сложный пример.

§ 2. Исследование функции $\frac{\sin x}{x}$ при значениях независимого переменного, как угодно малых по абсолютной величине

Прежде всего напомним некоторые сведения из арифметики:

а) Числом, обратным данному, называется число, полученное делением единицы на данное число. Например, число, обратное трем, есть одна треть, число, обратное $-\sqrt{2}$, есть $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, число, обратное π, есть $\frac{1}{\pi}$.

б) Если числа a и b удовлетворяют неравенству $0 < a < b$, то числа, им обратные, удовлетворяют неравенству $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

в) При неизменном уменьшаемом та разность больше, в которой вычитаемое меньше.

Теперь перейдем к исследованию функции $\frac{\sin x}{x}$.

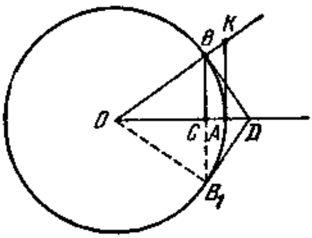

Рис. 42.

Возьмем окружность единичного радиуса и на ней дугу AB, радианная мера которой равна x (рис. 42). Проведем линию синусов CB, линию тангенсов AK и касательную BD. При этом $\triangle OAK = \triangle ODB$, так как $\angle OAK = \angle OBD = 90°$, $\angle AOB$ общий и $OA = OB = 1$.

Из равенства треугольников следует, что $BD = AK$, т. е. отрезок BD равен линии тангенсов. Повернем чертеж вокруг линии OD на 180°, тогда будем иметь

$$B_1B = B_1C + CB = 2CB, \quad B_1D + BD = 2AK,$$

и, следовательно, численно будут выполнены равенства

$$B_1B = 2\sin x, \quad B_1D + BD = 2\operatorname{tg} x. \tag{1}$$

Так как длина хорды меньше, чем длина дуги, стягиваемой этой хордой, то

$$2\cdot\sin x < \smile B_1AB = 2x. \tag{2}$$

Поскольку длина ломаной линии, описанной около дуги окружности, больше, чем длина этой дуги, то

$$B_1D + BD > \smile B_1AB, \quad \text{или} \quad 2\operatorname{tg} x > 2x. \tag{3}$$

Из неравенства (2) получаем

$$0 < \sin x < x. \tag{4}$$

Следовательно, можно сказать, что *синус положительного угла всегда меньше своего аргумента.*

Из неравенства (3) получаем

$$\operatorname{tg} x > x. \tag{5}$$

Объединяя неравенства (4) и (5), будем иметь

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

или, деля на $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{6}$$

Вспомнив замечание б), сделанное в начале параграфа, получим

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{7}$$

Вычтем из единицы величины 1, $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$ и, вспомнив замечание в), будем иметь

$$1 - 1 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x. \tag{8}$$

Преобразуем это неравенство, введя синус половинного угла:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2}. \tag{9}$$

Применяя неравенство (4), можно записать $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, и, следовательно, $\sin^2\frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Поэтому из неравенства (9) получим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}. \tag{10}$$

При помощи полученного неравенства (10) можно сделать следующие выводы:

Если x достаточно мало, то и $\frac{x^2}{2}$ тоже мало. Поэтому при небольших значениях независимого переменного x величина разности $1-\frac{\sin x}{x}$, заключенная между нулем и малой величиной $\frac{x^2}{2}$, сама также мала.

Этому выводу можно придать и такую форму:

Функция $1-\frac{\sin x}{x}$ при значениях x, приближающихся к нулю, принимает значения, близкие к нулю.

Будем говорить еще так: функция $1-\frac{\sin x}{x}$ *стремится* к нулю при условии, что x *стремится* к нулю.

Слово «стремится» будем обозначать знаком $\rightarrow$. Поэтому предыдущее заключение можно записать следующим образом: $1-\frac{\sin x}{x}\rightarrow 0$ при условии, что $x\rightarrow 0$.

Надо обратить внимание на то, что при x, равном нулю, дробь $\frac{\sin x}{x}$ теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.

Если функция $1-\frac{\sin x}{x}\rightarrow 0$, то $\frac{\sin x}{x}$ стремится к единице, следовательно, вывод из всего сказанного в этом параграфе такой:

Функция $\frac{\sin x}{x}$ стремится к единице при условии, что независимое переменное стремится к нулю:

$$\frac{\sin x}{x}\rightarrow 1, \quad \textit{если} \quad x\rightarrow 0.$$

§ 3. Определения предела

Определение 1. *Число l называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если разность $l-f(x)$ по абсолютной величине может быть сделана как угодно малой для всех значений x, достаточно мало отличающихся от a.*

Замечание. Часто вместо «предел функции» говорят «предельное значение функции».

Поясним это определение на примере, разобранном в § 2. Здесь функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, число $l=1$, число $a=0$. Разность $1-\frac{\sin x}{x}>0$, поэтому $\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|=1-\frac{\sin x}{x}$; с другой стороны, $1-\frac{\sin x}{x}$ меньше, чем $\frac{x^2}{2}$, которое может быть сделано как угодно малым, если выбрать x достаточно малым, т. е. достаточно близким к нулю.

Итак, используя определение, можно сказать, что функция $\frac{\sin x}{x}$ имеет пределом единицу при условии, что x стремится к нулю. Предел обозначается знаком lim, так что

$$l=\lim_{x\to a} f(x).$$

Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Это можно сформулировать так:

Предел отношения синуса к его аргументу при условии, что аргумент стремится к нулю, равен единице.

Пример 1. Покажем, что функция $y=2x+1$ имеет предел, равный 5, при x, стремящемся к 2.

Для доказательства рассмотрим разность между числом 5 и выражением $2x+1$. Преобразуя эту разность, получим

$$5-(2x+1)=5-2x-1=4-2x=2(2-x).$$

Так как $|5-(2x+1)|=2|2-x|$, то, взяв x достаточно близким к 2, получим, что абсолютная величина разности $|2-x|$ мала, а поэтому и произведение $2|2-x|$ тоже мало.

Таким образом, абсолютная величина разности может быть сделана как угодно малой для всех значений x, близких к 2, а это и значит, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$.

Этот пример отличается от разобранного в § 2 следующим. Если вычислим значение функции $y=2x+1$ при $x=2$, то получим $2\cdot 2+1=5$, т. е. значение функции $y=2x+1$ при $x=2$ равно пределу этой функции при x, стремящемся к 2. В примере § 2 было иначе. Там значения функции $\frac{\sin x}{x}$

при $x=0$ не существовало, а предел этой функции при x, стремящемся к 0, был равен 1.

Это различие выражают словами так: функция может достигать своего предельного значения (пример 1 этого параграфа), и функция может не достигать своего предела (см. § 2).

В случае неограниченного возрастания независимого переменного дается другое определение предела.

Определение 2. *Число l называется пределом функции $f(x)$ при неограниченном возрастании независимого переменного, если разность $l-f(x)$ может быть сделана как угодно малой по абсолютной величине для всех достаточно больших значений независимого переменного.*

Пример 2. Покажем, что предел функции $y=\frac{4x^2+1}{x^2}$ при неограниченном возрастании x равен 4.

Рассмотрим разность $4-\frac{4x^2+1}{x^2}$ и ее абсолютную величину

$$\left|4-\frac{4x^2+1}{x^2}\right|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}.$$

Если x велико по абсолютной величине, то и x^2 тоже велико, следовательно, $\frac{1}{x^2}$ мало, поэтому разность $\left|4-\frac{4x^2+1}{x^2}\right|$ при x больших будет мала, а это и значит, что предел функции $\frac{4x^2+1}{x^2}$ при неограниченном возрастании x равен 4.

Условие «неограниченно возрастает» записывают так: $x\to\infty$. Результат примера 2 может быть записан следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{x^2}=4.$$

Будем говорить, что независимое переменное неограниченно убывает, если оно, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Пример 3. Если x принимает значения -10, -100, -1000, $-10\,000$, ..., -10^n, ..., то оно неограниченно убывает.

Предел функции при неограниченном убывании независимого переменного определяется аналогично определению 2, только вместо слов «для всех достаточно больших значений» ставятся слова «для всех достаточно малых». При этом слова «достаточно малых» означают, что число отрицательно, а его абсолютная величина велика.

Предел при этом условии записывают так:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Пример 4. Покажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x}=2$.

Рассмотрим разность $2-\frac{2x+1}{x}$, она равна $-\frac{1}{x}$, поэтому

$$\left|2-\frac{2x+1}{x}\right|=\left|-\frac{1}{x}\right|.$$

Но если x отрицательно и велико по абсолютной величине, то $\left|-\frac{1}{x}\right|$ мала по абсолютной величине, а это значит, что 2 есть предел функции $\frac{2x+1}{x}$ при x, неограниченно убывающем.

Применяя указанные обозначения, свойства показательной функции, указанные в гл. IV, § 2, можно записать так:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=\infty \quad (a>1), \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (a>1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0 \quad (0<a<1), \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=\infty \quad (0<a<1).$$

Замечание. Во всех определениях предела употреблялась абсолютная величина. Это объясняется тем, что функция может приближаться к пределу, оставаясь меньше его, больше его, и, наконец, колеблясь, т. е. становясь то больше, то меньше предела. Чтобы иметь возможность говорить о всех этих случаях сразу и употребляют абсолютную величину.

§ 4. Свойства пределов

Во всех примерах, которые были приведены выше, мы не находили пределов, а доказывали, что такое-то число является пределом заданной функции при указанных условиях. Естественно возникает вопрос, как найти то число, относительно которого дальше будем доказывать, что оно является пределом заданной функции. Эта задача почти всегда является очень трудной, особенно если исходить из определения предела. Для облегчения этой задачи обычно используют некоторые свойства пределов, к изложению которых мы и переходим. Приводимые свойства будут поясняться на примерах, а доказательства даваться не будет. Доказательства можно найти в более полных курсах, например: Пискунов Н. С., «Дифференциальное и интегральное исчисление» или Тарасов Н. П., «Курс высшей математики».

Свойство 1. *Предел суммы определенного числа функций равен сумме пределов каждой из этих функций*, т. е.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

В формулировке этого свойства, так же как и в следующих, предполагается, что все пределы вычисляются при одних и тех же условиях.

Пример 1. Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + \sin x}{x}$, зная, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ и } \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Так как $\frac{x^2 + \sin x}{x} = x^2 + \frac{\sin x}{x}$, то, применяя указанное свойство, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[x^2 + \frac{\sin x}{x}\right] =$$
$$= \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

Замечание. В формулировке свойства 1 говорится о сумме, но поскольку разность всегда можно записать в виде суммы, то свойство 1 распространяется и на разности.

Пример 2. Найдем предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x^2}{x}$.

Так как $\frac{\sin x - x^2}{x} = \frac{\sin x}{x} + (-x^2)$, то, применяя свойство 1, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x} + (-x^2)\right] =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \to 0} (-x^2) = 1 + 0 = 1.$$

Свойство 2. *Предел функции, сохраняющей одно и то же значение, равен этому значению.*

Это свойство формулируют и иначе: *предел постоянного равен этому постоянному.*

Пример 3. Найдем предел $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} [\sin^2 x + \cos^2 x]$.

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x$ при любых значениях x равно 1, то здесь имеет место случай, когда функция сохраняет постоянное значение, поэтому $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} [\sin^2 x + \cos^2 x] = 1$.

Пример 4. Найдем предел $\lim\limits_{x \to 2} 7{,}5$. Так как 7,5 постоянно и не зависит от x, то $\lim\limits_{x \to 2} 7{,}5 = 7{,}5$.

Свойство 3. *Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций.*

Пример 5. Найдем предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \sin x + \sin^2 x}{x^2}$.

В примере 1 этого параграфа было показано, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + \sin x}{x^2} = 1$, а в § 2,— что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Применяя свойство 3, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^3 + \sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right] = \\ = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + \sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Хотя в формулировке свойства 3 говорится только о двух функциях, но этим же свойством можно пользоваться и при большем числе сомножителей.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{4(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin x}{x}\right]$. Это выражение можно представить как произведение двух сомножителей: $[4(\sin^2 x + \cos^2 x)]$ и $\dfrac{\sin x}{x}$. Применяя свойство 3, получим

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{4(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin x}{x}\right] = \\ = \lim_{x \to 0} [4(\sin^2 x + \cos^2 x)] \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Применим это же свойство к первому сомножителю, получим

$$\lim_{x\to 0}[4(\sin^2 x+\cos^2 x)]\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}4\lim_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos^2 x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=4\cdot 1\cdot 1=4.$$

Свойство 4. *Предел частного двух функций равен частному от деления предела делимого на предел делителя при условии, что предел делителя не равен нулю.*

Пример 7. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$, $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$, то по свойству 4 имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{1}=4.$$

Если же предел делителя равен нулю, то предел частного может равняться любому числу в зависимости от делимого. Приведем примеры.

Пример 8. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^m}{x^3}$, где m — целое число >0. В этом примере предел делителя равен нулю, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^3=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Разберем возможные частные случаи. Если $m=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}=a\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

(см. пр. 5 § 1, а объяснение знака ∞ в пр. 2 § 3).

Если $m=3$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}a=a$.

Если $m=5$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^5}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}ax^2=a\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Заметим, что отыскание предела частного двух функций в случае, когда пределы и делителя и делимого одновременно равны нулю, является задачей, наиболее часто встречающейся и теоретически одной из важнейших. Но именно в этом случае свойство 4 не приносит пользы.

Свойство 5 (важное свойство предела). Если точка M двигается как угодно по оси Ox, приближаясь к точке P как к своему пределу и точка P не совпадает с началом координат, то возможны только два случая:

1) если P имеет положительную абсциссу, то точка M с некоторых пор имеет также положительную абсциссу;

2) если P имеет отрицательную абсциссу, то и точка M с некоторого момента имеет отрицательную абсциссу. Отсюда:

Если предел не равен нулю, то с некоторых пор знаки предела и допредельной величины совпадают.

§ 5. Предел $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Число e

Рассмотрим функцию $(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Если x стремится к нулю, то содержимое скобки приближается к единице. Если x не равно нулю, то и скобка не будет равна единице; при этом, если x больше нуля, то скобка больше единицы, если x меньше нуля, то скобка меньше единицы.

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Неясно, чему он будет равняться, так как при $x > 0$ число, большее единицы, возводится в положительную степень, а при $x < 0$ число, меньшее единицы, возводится в отрицательную степень. Однако можно показать, что этот предел существует. Это доказывается в подробных курсах. Число, равное этому пределу, обозначается буквой e. Таким образом, числом e называется $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Число e является иррациональным числом, его приближенное значение равно (с точностью до одной тысячной) 2,718. Оно встречается в математике столь же часто, как и число π. Оказалось очень удобным взять число e за основание логарифмов. Логарифмы с основанием e называются ***натуральными*** логарифмами. Они обозначаются знаком ln. Этими логарифмами пользуются преимущественно в теоретических вопросах.

П р и м е р 1. Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Обозначив $\frac{1}{n} = x$, будем иметь, что при $n \to \infty$ $x \to 0$. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример 2. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$. Для этого преобразуем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$. Обозначив $\frac{1}{x^2}=\alpha$, будем иметь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Замечание. Так как $e>1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$, а $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ (см. конец § 3).

§ 6. Непрерывные функции

Как уже отмечалось, при нахождении пределов могут встретиться две возможности:

1) Предел функции равен значению функции при предельном значении независимого переменного, т. е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Так было в примере 1 § 3.

2) Предельное значение функции не равнялось значению функции при предельном значении независимого переменного, т. е.

$$\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a).$$

Так было в примере, разобранном в § 2, где $f(0)=\frac{\sin 0}{0}$ не существовало. В связи с этим особо выделяется класс непрерывных функций.

Определение. *Функция $f(x)$ называется непрерывной во всей области ее существования, если для любого a из области существования имеет место равенство*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Те точки, в которых это условие не выполняется, называются точками разрыва функции.

Для доказательства непрерывности функции нужно показать справедливость равенства $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ при любом a из области существования функции.

Докажем непрерывность некоторых функций.

Так, функция $y = x$ непрерывна, поскольку $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Рассмотрим степенную функцию x^n, где n — целое положительное число. Применяя свойство 3 § 5, будем иметь

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x \ldots \lim_{x \to a} x = a \cdot a \ldots a = a^n.$$

А это и значит, что степенная функция (с целым и положительным показателем) всюду непрерывна.

Так же легко доказать непрерывность многочлена (применяя свойства 1 и 3 § 5). Конечно, существует бесчисленное множество и других непрерывных функций.

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся функции, непрерывные всюду в области своего существования:

	Функция	Область существования
1	x	$-\infty < x < +\infty$
2	$x^n \ (n > 0)$	$-\infty < x < +\infty$
3	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$-\infty < x < +\infty$
4	$\sqrt{x}$	$x \geqslant 0$
5	$\dfrac{1}{x-a}$	$x \neq a$
6	$\log_a x \ (a > 1)$	$x > 0$
7	$\sin x$	$-\infty < x < +\infty$
8	$\cos x$	$-\infty < x < +\infty$
9	$\operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $\Big\}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n$
10	$\operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$ $\Big\}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n$
11	$\arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant +1$
12	$\operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$
13	a^x	$-\infty < x < +\infty$

Основное свойство непрерывной функции

Пусть функция непрерывна, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ при любом a из области существования. По определению предела разность $|f(a) - f(x)|$ может быть сделана сколь угодно малой для всех значений x, достаточно мало отличающихся от a. Иными словами, если $x - a$ стремится к нулю, то и $|f(a) - f(x)| = |f(x) - f(a)|$ стремится к нулю. Но $x - a = h$ — приращение независимого переменного, а $f(x) - f(a) = \Delta y$ — приращение функции. Поэтому сказанное ранее можно сформулировать так: *для непрерывной функции приращение независимого переменного и приращение функции одновременно стремятся к нулю.* В точках разрыва это не выполняется. На рис. 43 в точке A приращения функции и независимого переменного одновременно стремятся к нулю, в то время как в точке B приращение функции не может сделаться меньше BC (если $h > 0$), хотя приращение независимого переменного может стремиться к нулю.

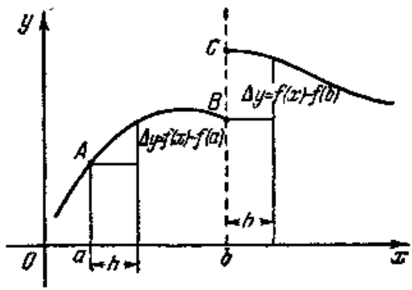

Рис. 43.

Замечание. *Во всех последующих главах, если не указано противное, предполагается, что рассматриваемые функции непрерывны. Каждый раз, когда будут встречаться не непрерывные функции, это будет указано. В некоторых случаях, однако, непрерывность функции будет оговариваться специально.*

Итак, каждый раз, когда встречается слово «функция» без оговорок, ее следует считать непрерывной.

§ 7. Решение задач на нахождение пределов

При решении задач на отыскание пределов следует помнить некоторые пределы, чтобы каждый раз не вычислять их заново. Комбинируя эти известные пределы, будем находить при помощи свойств, указанных в § 4, новые пределы.

Для удобства приведем наиболее часто встречающиеся пределы:

	Пределы
1	$\lim\limits_{x \to a} x = a$
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
3	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$
4	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\lvert x \rvert} = \infty$
5	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
6	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, если $f(x)$ непрерывна

Если известно, что функция непрерывна, то вместо нахождения предела вычисляем значение функции.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 6x + 8)$. Так как многочлен — функция непрерывная, то

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 6x + 8) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x}$. Сначала находим предел знаменателя: $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 5x) = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6$; он не равен нулю, значит, можно применить свойство 4 § 4, тогда

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 5x)} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}{1^2 + 5 \cdot 1} = \frac{0}{6} = 0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \left| \frac{1}{x^2 + x} \right|$. Предел знаменателя равен нулю, поэтому свойство 4 § 4 применить нельзя. Так как числитель — постоянное число, а знаменатель $(x^2 + x) \to 0$

при $x \to -1$, то вся дробь неограниченно возрастает по абсолютной величине, т. е. $\lim\limits_{x \to -1} \left| \frac{1}{x^2+x} \right| = \infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$. Предел знаменателя равен нулю: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-6x+8) = 2^2-6 \cdot 2+8=0$, поэтому свойство 4 § 4 неприменимо. Но предел числителя тоже равен нулю: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-5x+6) = 2^2-5 \cdot 2+6=0$. Итак, пределы числителя и знаменателя одновременно равны нулю.

Однако число 2 является корнем и числителя и знаменателя, поэтому дробь можно сократить на разность $x-2$ (по теореме Безу). В самом деле,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4},$$

следовательно,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} x^n$ (n целое, положительное). Имеем

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ раз}}.$$

Так как каждый множитель неограниченно растет, то и произведение также неограниченно растет, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ (n целое, положительное). Имеем $x^n = x \cdot x \ldots x$. Так как каждый множитель растет по абсолютной величине, оставаясь отрицательным, то в случае четной степени произведение будет неограниченно расти, оставаясь положительным, т. е. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (при n четном).

В случае нечетной степени абсолютная величина произведения растет, но оно остается отрицательным, т. е. $\lim\limits_{n \to -\infty} x^n = -\infty$ (при n нечетном).

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^m}{x^n}$.

Если $m>n$, то можно написать: $m=n+k$, где $k>0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+k}}{x^n}=\lim_{x\to\infty}x^k.$$

Пришли к примеру 6.

Если же $m<n$, то $n=m+k$ $(k>0)$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^m}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^{m+k}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}.$$

Здесь числитель остается постоянным, а знаменатель растет по абсолютной величине, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0.$$

Результат этого примера рекомендуется запомнить в следующем виде:

Степенная функция растет тем быстрее, чем больше показатель степени.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+7}{3x^8+5x^3-3x-5}$. В этом примере и числитель и знаменатель неограниченно возрастают. Разделим и числитель и знаменатель на старшую степень x, т. е. на x^8, тогда

$$\frac{6x^5-3x^2+7}{3x^8+5x^3-3x-5}=\frac{\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{7}{x^8}}{4+\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{3}{x^7}-\dfrac{5}{x^8}}$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-3x^2+7}{3x^8+5x^3-3x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{3}{x^6}+\dfrac{7}{x^8}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[3+\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{3}{x^7}-\dfrac{5}{x^8}\right]}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^6}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x^8}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^5}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^7}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^8}}=\frac{0}{3}=0.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-7x}{x^3+3}$. Совершая преобразования, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-7x}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x^5}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^6}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^5}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^6}=0$, то предел знаменателя равен нулю, в то время как предел числителя равен 1. Следовательно, вся дробь неограниченно возрастает, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-7x}{x^3+3}=\infty.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$. Вычислим предел знаменателя, помня, что $\cos x$ — функция непрерывная: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)=2+\cos\frac{\pi}{2}=2$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{2+\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{2}=1.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Положим $\sqrt{x}=\alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-6x+9)}{x^2-6x+9}$. Здесь имеет место отношение синуса к его аргументу при условии, что аргумент стремится к нулю. Обозначив x^2-6x+9 через α, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-6x+9)}{x^2-6x+9}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Введя половинный угол и вспомнив предыдущие примеры, будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$. Преобразуем это выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x})^2-2^2}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 15. Найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{(x-\alpha)^2}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-(x-\alpha)^2}$. Положим $(x-\alpha)^2=z$; так как $(x-\alpha)^2$ всегда неотрицательно и неограниченно растет вместе с x, то при $x\to\pm\infty$ новое переменное $z\to\infty$. Поэтому получаем $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{(x-\alpha)^2}=$ $=\lim\limits_{z\to\infty}e^z=\infty$ (см. замечание к § 5).

Аналогично $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-(x-\alpha)^2}=\lim\limits_{z\to\infty}e^{-z}=0$, так как $-(x-\alpha)^2$ неограниченно убывает при $x\to\pm\infty$ (см. замечание к § 5).

Упражнения к гл. VI

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4\sin x}{x}-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right]$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^{10}}{x^7}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^{10}}{x^7}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5}{x^2+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x-3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+7}{x^3-6x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x-1}{5x^2+3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x-5}{8x^2+12x-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

ГЛАВА VII

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1. Скорость

Прямолинейным и равномерным движением называется движение, при котором тело (точка) движется по прямой и за равные промежутки времени проходит равные пути. Скоростью v этого движения называется отношение пути s, пройденного за промежуток времени t, к величине этого промежутка, т. е. $v=\frac{s}{t}$. Если движение неравномерное, то отношение меняется, поэтому говорить о скорости неравномерного движения так просто, как это можно сделать при равномерном движении, нельзя. Разберем подробнее этот вопрос.

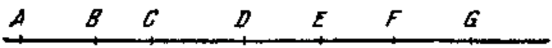

Рис. 44.

Пусть по железной дороге (рис. 44), на которой имеются станции A, B, C, D, E, F, G, движется поезд от станции A до станции G согласно приведенному ниже расписанию. В расписании указаны также расстояния от начальной станции. Напомним, что средней скоростью при любом движении называется отношение пути к промежутку времени, за который этот путь пройден.

Весь путь от A до G поезд проходит за три часа, а это расстояние равно 120 *км*, поэтому средняя скорость поезда равна 40 *км/час*.

Но этот же поезд на отдельных перегонах имеет бóльшую среднюю скорость.

Станция	Расстояние от станции A	Прибытие	Отправление
A	0 *км*	—	13 ч. 00 м.
B	20 *км*	13 ч. 30 м.	13 ч. 35 м.
C	35 *км*	14 ч. 00 м.	14 ч. 00 м.
D	60 *км*	14 ч. 40 м.	14 ч. 40 м.
E	80 *км*	15 ч. 10 м.	15 ч. 20 м.
F	100 *км*	15 ч. 40 м.	15 ч. 40 м.
G	120 *км*	16 ч. 00 м.	—

На станции D, как это видно из расписания, поезд не останавливается. Поставим вопрос: что мы будем понимать под скоростью поезда в момент прохождения им станции D и чему эта скорость будет равна? Будем вычислять средние скорости на различных перегонах, имеющих станцию D или своим началом, или концом:

перегон $DG = 60$ *км* проходится за 1 *час* 20 *мин*; средняя скорость равна 45 *км/час*;

перегон $DF = 40$ *км* проходится за 1 *час*; средняя скорость равна 40 *км/час*;

перегон $DE = 20$ *км* проходится за 30 *мин*; средняя скорость равна 40 *км/час*;

перегон $AD = 60$ *км* проходится за 1 *час* 40 *мин*; средняя скорость равна 36 *км/час*;

перегон $BD = 40$ *км* проходится за 1 *час* 5 *мин*; средняя скорость равна $36^{12}/_{13}$ *км/час*;

перегон $CD = 25$ *км* проходится за 40 *мин*; средняя скорость равна 37,5 *км/час*.

Как видим, средние скорости меняются от перегона к перегону. Какую же скорость принять за истинную? Ведь мимо станции D поезд проходил с вполне определенной скоростью. Чему же она равна? Ответить на поставленный вопрос нельзя, так как у нас нет для этого оснований. Однако вероятнее всего, что средние скорости на участках CD и DE будут лучше отражать истинное положение, так как на перегонах CD и DE поезд подвергался меньшим случайностям, чем на больших перегонах. Но и эти скорости не являются ответом на вопрос. Ведь можно и дальше уменьшать перегоны и получать все новые и новые средние скорости. Очевидно, чем меньше перегон, тем лучше средняя скорость будет отображать действительное положение. Поэтому за скорость в данный момент принимают предел средней скорости за промежуток времени, имеющий началом данный момент, при условии, что этот промежуток стремится к нулю.

§ 2. Касательная

Как известно, касательная к окружности имеет с окружностью одну общую точку. Если же рассмотреть какую-нибудь другую линию, например синусоиду, то прямая, касающаяся синусоиды в точке A (рис. 45), пересечет ее в точке B, т. е. будет иметь с ней уже две общие точки. Таким образом, определение касательной, данное для окружности, к другим линиям уже неприменимо.

Общее определение касательной стало возможным только после того, как было введено понятие предела.

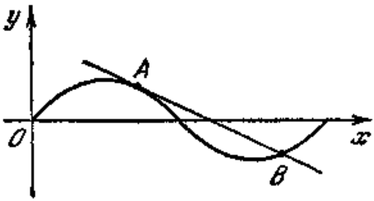

Рис. 45.

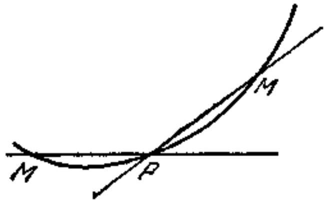

Рис. 46.

Рассмотрим кривую и на ней точку P (рис. 46). Проведем через эту точку прямую, пересекающую линию еще и в точке M. Точка M может лежать по любую сторону от точки P. На рис. 46 указаны два возможных положения точки M. Точку P не будем менять в процессе рассуждения, а точку M, наоборот, начнем двигать по линии в направлении к точке P. Тогда секущая PM будет поворачиваться вокруг точки P. Если при этом окажется, что существует предельное положение секущей при условии, что M приближается к P, то *предельное положение секущей и называют касательной к рассматриваемой линии в данной точке P.*

§ 3. Производная

Несмотря на то, что в предыдущих параграфах были рассмотрены два различных примера, между ними есть нечто общее. Для того чтобы это выяснить, нужно стать на функциональную точку зрения.

Пусть дана функция $y=f(x)$.

Чтобы получить задачу о скорости, будем считать, что независимое переменное x есть время, а y — расстояние точки, движущейся по прямой, от начала координат. Уравнение $y=f(x)$ в этом случае называется законом движения.

Чтобы получить задачу о касательной, будем считать, что x — абсцисса и y — ордината точки, лежащей на кривой линии, определяемой уравнением $y=f(x)$.

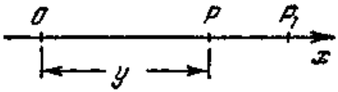

Рис. 47.

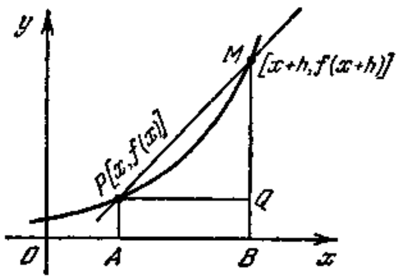

Рис. 48.

Будем производить над функцией $y=f(x)$ некоторые операции и одновременно выяснять, что эти операции означают в задаче о скорости и в задаче о касательной.

1. Дадим x определенное числовое значение и вычислим соответствующее значение

$$y=f(x). \tag{1}$$

В задаче о скорости это значит, что для определенного момента времени x мы нашли расстояние y движущейся точки от начала координат (рис. 47).

В задаче о касательной это означает, что мы определили координаты точки P, лежащей на кривой, определенной уравнением $y=f(x)$ (рис. 48).

2. Дадим x приращение h и вычислим соответствующее приращенное значение y, которое отличается от первоначального на величину Δy (приращение функции) (см. гл. V, § 4):

$$y+\Delta y=f(x+h). \tag{2}$$

В задаче о скорости тем самым мы определяли положение P_1 движущейся точки в момент времени $x+h$.

В задаче о касательной получена новая точка M. Здесь $AB=PQ=h$, $OB=x+h$, $BM=f(x+h)$.

3. Найдем приращение функции Δy; для этого вычтем почленно из равенства (2) равенство (1):

$$\Delta y=f(x+h)-f(x). \tag{3}$$

В задаче о скорости вычислен путь, пройденный точкой за промежуток времени от момента x до момента $x+h$.

В задаче о касательной вычислен отрезок $QM=BM-BQ=BM-AP$.

4. Разделим Δy на h, т. е. найдем отношение приращения функции к приращению независимого переменного:

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{4}$$

В задаче о скорости вычислена средняя скорость за промежуток времени h от момента x до момента $x+h$.

В задаче о касательной найдено отношение отрезков QM и PQ, т. е. тангенс угла $\angle QPM$, являющийся угловым коэффициентом секущей PM.

5. Найдем предел $\frac{\Delta y}{h}$ при условии, что $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5}$$

В задаче о скорости найденный предел дает скорость в данный момент.

В задаче о касательной этот предел дает *тангенс угла наклона касательной к оси Ox*.

Таким образом, последовательность операций 1, 2, 3, 4, 5, произведенных над функцией, приводит к двум важным понятиям:

1) скорости в данный момент,

2) углового коэффициента касательной.

Но этими двумя приложениями применение указанной последовательности операций не исчерпывается. Поэтому целесообразно изучить рассмотренную совокупность операций в общем виде. Для этого прежде всего дадим определение.

Определение. *Производной от функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при условии, что приращение независимого переменного стремится к нулю.*

Производная от функции $y=f(x)$ обозначается $f'(x)$, или y', или $\frac{dy}{dx}$, так что имеем:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Пример 1. Вычислим производную функции

$$y=x^2. \tag{1'}$$

Для этого дадим x приращение h:

$$y+\Delta y=(x+h)^2. \tag{2'}$$

Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2. \tag{3'}$$

Ищем отношение приращения функции к приращению независимого переменного:

$$\frac{\Delta y}{h}=2x+h. \tag{4'}$$

Находим предел этого отношения при условии $h\longrightarrow 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x. \tag{5'}$$

Таким образом, найдена производная функции x^2:

$$(x^2)'=2x.$$

Пример 2. Вычислим производную функции

$$y=2x^3-x. \tag{1''}$$

Даем x приращение h:

$$y+\Delta y=2(x+h)^3-(x+h). \tag{2''}$$

Находим приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y&=2(x+h)^3-(x+h)-2x^3+x=\\&=6x^2h+6xh^2+2h^3-h.\end{aligned} \tag{3''}$$

Ищем отношение

$$\frac{\Delta y}{h}=6x^2+6xh+2h^2-1. \tag{4''}$$

Находим предел этого отношения, т. е. производную

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2-1)=6x^2-1. \tag{5''}$$

Итак,

$$(2x^3-x)'=6x^2-1.$$

Как видно из приведенных примеров, вычисление производных довольно кропотливо, но однообразно. Поэтому предпочитают заранее вычислить производные часто встречающихся функций, запомнить эти производные и при решении задач уже пользоваться готовыми результатами.

§ 4. Правила вычисления производных

В этом параграфе будут вычисляться производные при заданном значении независимого переменного, т. е. x будет считаться постоянным, меняться будет его приращение h и, следовательно, y. Вычисления будут производиться по схеме, данной в § 3.

1. Производная степени. Возьмем степенную функцию

$$y=x^n. \tag{1}$$

Дадим независимому переменному приращение h, тогда функция получит приращение Δy:

$$y+\Delta y=(x+h)^n; \tag{2}$$

найдем приращение функции Δy, вычитая почленно из равенства (2) равенство (1):

$$\Delta y=(x+h)^n-x^n. \tag{3}$$

Раскладывая $(x+h)^n$ по формуле бинома Ньютона, преобразуем правую часть равенства (3):

$$\Delta y=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x^n$$

или, после приведения подобных членов,

$$\Delta y = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

Разделим обе части последнего равенства на h, тогда

$$\frac{\Delta y}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}.$$

Перейдем к пределу при условии, что h стремится к нулю. Так как $\lim\limits_{h\to 0} h^k = 0$, то $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = nx^{n-1}$, т. е.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{I}$$

т. е. *производная степени равна произведению показателя степени на степень с тем же основанием и показателем, уменьшенным на единицу.*

Пример 1. Вычислим производную функции $y = x^5$. Применяя выведенное правило, будем иметь $y' = (x^5)' = 5x^{5-1}$, т. е. $(x^5)' = 5x^4$.

Пример 2. Вычислим производную функции $y = x$ или $y = x^1$; применяя выведенное правило, получаем

$$y' = 1\cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$$

Это следует запомнить в следующей формулировке:

Производная независимого переменного равна единице.

Примечание. При выводе производной степени мы считали, что n — число целое и положительное, однако формула остается верной, если отказаться от этого условия.

Пример 3. Вычислим производную функции $y = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$. Здесь $n = \frac{1}{2}$, поэтому

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4. Вычислим производную функции $y = \frac{1}{x}$, $y = x^{-1}$. Следовательно,

$$y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

II. Производная синуса. Пусть

$$y = \sin x. \tag{1}$$

Дадим x приращение h, тогда y изменится и будет равен

$$y + \Delta y = \sin(x + h). \tag{2}$$

Найдем приращение Δy, вычитая почленно из равенства (2) равенство (1):

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x$$

или, после преобразования,

$$\Delta y = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{3}$$

Разделим обе части равенства (3) на приращение независимого переменного:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{4}$$

Переходим к пределу при условии, что $h \to 0$. Получим

$$\lim_{h \to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \tag{5}$$

Так как отношение синуса к его аргументу при условии, что аргумент стремится к нулю, равно единице (см. гл. VI, § 2), то

$$\lim_{h \to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Кроме того, косинус — функция непрерывная (см. гл. VI, § 5), следовательно, $\lim\limits_{h \to 0}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$. В силу сказанного из равенства (5) получаем $\lim\limits_{h \to 0}\frac{\Delta y}{h} = \cos x$, а это значит, что

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{II}$$

т. е. *производная синуса равна косинусу того же угла.*

III. Производная косинуса. Аналогично тому, как мы вывели производную синуса, можно вывести производную косинуса. Только при этом придется применить формулу разности косинусов. Проделав все выкладки, получим

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{III}$$

т. е. *производная косинуса равна синусу того же угла, взятому с обратным знаком.*

IV. Производная суммы двух функций. Предположим, что производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ нам известны. Требуется найти производную от их суммы. Рассмотрим сумму

$$y = f(x) + \varphi(x). \tag{1}$$

Дадим x приращение h, тогда каждая из функций получит приращение и их сумма также получит приращение

$$y + \Delta y = f(x+h) + \varphi(x+h). \tag{2}$$

Найдем приращение Δy, вычитая из равенства (2) почленно равенство (1):

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) + \varphi(x+h) - \varphi(x). \tag{3}$$

Разделим обе части последнего равенства на h:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Перейдем к пределу при условии, что $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

Так как $f(x+h)-f(x)$ есть приращение функции $f(x)$, а $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ — приращение функции $\varphi(x)$, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

являются производными функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Поэтому

$$y' = f'(x) + \varphi'(x),$$

или

$$[f(x) + \varphi(x)]' = f'(x) + \varphi'(x), \tag{IV}$$

т. е. *производная суммы двух функций равна сумме их производных.*

V. Производная произведения двух функций. Предположим, что нам известны производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, а требуется найти производную их произведения. Пусть

$$y = f(x)\varphi(x). \tag{1}$$

Дадим x приращение h, получим

$$y + \Delta y = f(x+h)\varphi(x+h). \tag{2}$$

Найдем приращение Δy:

$$\Delta y = f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x). \tag{3}$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (3) выражение $f(x+h)\varphi(x)$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta y = f(x+h)\varphi(x+h) - f(x+h)\varphi(x) + f(x+h)\varphi(x) - \\ - f(x)\varphi(x) = f(x+h)[\varphi(x+h) - \varphi(x)] + \\ + [f(x+h) - f(x)]\varphi(x),\end{aligned} \tag{4}$$

Разделим обе части равенства (4) на h:

$$\frac{\Delta y}{h} = f(x+h)\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\varphi(x). \tag{5}$$

Так как

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x)$$

и

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

то, переходя к пределу в равенстве (5) при условии $h \to 0$, получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\varphi(x),$$

или

$$y' = [f(x)\varphi(x)]' = f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x), \tag{V}$$

т. е. *производная произведения двух функций равна сумме двух произведений: первое из них есть произведение первой функции на производную второй, а второе равно произведению производной первой функции на вторую.*

VI. Производная функции, сохраняющей одно и то же значение, т. е. производная постоянного. Если функция сохраняет при всех значениях независимого переменного одно и то же значение a, то ее график есть прямая линия, параллельная оси Ox, а ее уравнение $y=a$. Касательная к этой прямой, конечно, совпадает с ней самой, поэтому угол наклона касательной равен нулю, следовательно, и тангенс угла наклона тоже равен нулю, а это и значит, что производная равна нулю.

Таким образом, *производная постоянного равна нулю*, т. е.

$$a'=0. \tag{VI}$$

VII. Следствие. Пусть дано произведение некоторой функции $f(x)$ на постоянное a, т. е. $y=af(x)$. Найдем производную этого произведения. Применяя формулу (V) этого параграфа, получим

$$y'=af'(x)+a'f(x),$$

но производная постоянного равна нулю, поэтому $a'=0$ и $y'=af'(x)$, или

$$[af(x)]'=af'(x). \tag{VII}$$

Говорят, что *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Приведем примеры применения правил (I)—(VII).

Пример 5. Вычислим производную функции $y=2x^3+5x^2$. Записываем последовательно $y'=(2x^3+5x^2)'$. Применяя правило (IV), получим $y'=(2x^3)'+(5x^2)'$. Применяя правило (VII), получим $y'=2(x^3)'+5(x^2)'$. Наконец, применяя правило (I), будем иметь окончательный результат

$$y'=2\cdot 3x^2+5\cdot 2x=6x^2+10x.$$

Пример 6. Вычислим производную функции $y=7\sin x\cos x$. Применяя правило (VII), получим

$$y'=(7\sin x\cos x)'=7(\sin x\cos x)'.$$

Применяя правило (V), получим

$$y'=7[\sin x(\cos x)'+(\sin x)'\cos x].$$

Применяя правила (II) и (III), будем иметь

$$y'=7[\sin(-\sin x)+\cos x\cos x]$$

или, произведя упрощения,

$$y' = 7\,[\cos^2 x - \sin^2 x] = 7\cos 2x.$$

Пример 7. Вычислим производную функции $y = \frac{x^2 + \sin x}{5}$, т. е. $y' = \left[\frac{x^2+\sin x}{5}\right]'$.

Применяя (VII), получим $y' = \frac{1}{5}\left(x^2 + \sin x\right)'$;

применяя (IV), получим $y' = \frac{1}{5}\,[(x^2)' + (\sin x)']$;

применяя (I), получим $y' = \frac{1}{5}\,[2x + (\sin x)']$;

применяя (II), получим $y' = \frac{1}{5}\,[2x + \cos x]$.

VIII. Производная частного двух функций. Если даны две функции, производные которых известны, то производная их частного вычисляется по следующему правилу:

Производная частного двух функций равна дроби, в числителе которой стоит разность произведения производной числителя на знаменатель и произведения числителя на производную знаменателя, а в знаменателе стоит квадрат знаменателя.

Пусть $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, тогда

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,\varphi(x) - f(x)\,\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}. \tag{VIII}$$

IX. Производная тангенса. Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Выражая тангенс через синус и косинус, получим $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Применим правило (VIII), а потом (II) и (III), тогда получим

$$y' = [\operatorname{tg}(x)]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{IX}$$

Следовательно, *производная тангенса равна единице, деленной на квадрат косинуса того же угла.*

X. Производная котангенса. Вычислим производную котангенса. Пусть $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Применяя правило (VIII), получим

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}.$$

Применяя правила (II) и (III), получим

$$(\operatorname{ctg} x)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \text{(X)}$$

XI. Производная сложной функции. Прежде чем рассматривать производную сложной функции $y=f[\varphi(x)]$, представим ее в виде цепочки функций (см. гл. V, § 3):

$$u=\varphi(x) \qquad (*)$$

и

$$y=f(u). \qquad (**)$$

Рассмотрим уравнения $(*)$ и $(**)$ независимо друг от друга. Первое из них дает u как функцию x; ее производная равна $\varphi'(x)$. Второе определяет y как функцию независимого переменного u; ее производная равна $f'(u)$. Но на самом деле рассматривать эти два уравнения отдельно друг от друга нельзя. Они связаны между собой. Действительно, если мы дадим x приращение h, то u, как функция x, получит приращение Δu, но u есть в то же время независимое переменное для функции y. Следовательно, изменяя u на Δu, мы изменим и y, который получит приращение Δy. По определению производной

$$\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h},$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Умножим почленно два последних равенства. Так как при $h\to 0$ приращение Δu тоже стремится к нулю, то

$$\varphi'(x)f'(u)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u\,\Delta y}{h\,\Delta u}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}. \qquad (***)$$

Но y есть функция независимого переменного x (в силу равенства $y=f[\varphi(x)]$), поэтому по определению производной

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}. \qquad (****)$$

Соединяя равенства (***) и (****), получим

$$y' = f'(u)\,\varphi'(x), \tag{XI}$$

т. е. *производная сложной функции равна произведению производных цепочки функций.*

Пример 8. Вычислим производную функции $y = \sin^4 x$. Представим y в виде цепочки функций: $u = \sin x$ и $y = u^4$. Так как $(\sin x)' = \cos x$ и $(u^4)' = 4u^3$, то производная y' равна произведению $\cos x \cdot 4u^3$, или $y' = 4\sin^3 x \cos x$.

Пример 9. Вычислим производную $y = \operatorname{tg} 3x$. Представим сложную функцию $y = \operatorname{tg} 3x$ в виде цепочки: $u = 3x$, $y = \operatorname{tg} u$. Вычислим производные: $u' = 3$, $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; их произведение даст искомую производную

$$y' = 3\frac{1}{\cos^2 u} = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

XII. Производная показательной функции. Производная показательной функции находится по правилу, выражаемому формулой

$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{XII}$$

В частности, если $a = e$, то $\ln e = 1$ и

$$(e^x)' = e^x.$$

Эта формула имеет много применений.

Пример 10. Найти производную $(2e^x + a^x)' = (2e^x)' + (a^x)' = 2e^x + a^x \ln a$.

XIII. Производная логарифмической функции. Производная логарифмической функции находится по правилу, выражаемому формулой

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{XIII}$$

Если $a = e$, то $\ln e = 1$, поэтому

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Пример 11. $[\ln(x+3)]' = \frac{1}{x+3}$.

Пример 12. $[e^x \ln x]' = e^x (\ln x)' + (e^x)' \ln x = \frac{e^x}{x} + e^x \ln x$.

XIV. Производные обратных тригонометрических функций $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$. Эти производные определяются так:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{XIV}$$

и

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{XV}$$

Пример 13. $[\operatorname{arctg} x + \arcsin x]' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 14. Найдем производную функции $y = e^{x^3+1}$. Представим функцию y в виде цепочки: $u = x^3+1$, $y = e^u$. Так как $(x^3+1)' = 3x^2$, $(e^u)' = e^u$, то $y' = 3x^2e^u = 3x^2e^{x^3+1}$.

Пример 15. Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} \ln x$. Представим функцию в виде цепочки: $u = \ln x$, $y = \operatorname{arctg} u$. Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}$, то $y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\ln^2 x}$.

Пример 16. Найдем $[\arcsin(1-x^2)]'$. Равносильная цепочка будет состоять из $u = 1-x^2$, $y = \arcsin u$. Так как

$$[1-x^2]' = -2x,\ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \text{то } [\arcsin(1-x^2)]' =$$
$$= -2x\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}.$$

Когда разовьются навыки в вычислении производных, то представление в виде цепочки можно делать в уме. Покажем это на примере. Конечно, первый пример будет описан подробно, поэтому на первый взгляд не будет заметно упрощения.

Пример 17. Вычислим производную функции $y = \ln \sin x^3$. Представив эту функцию в виде цепочки, будем иметь

$$u = x^3, \quad v = \sin u, \quad y = \ln v.$$

Так как $(x^3)' = 3x^2$, $(\sin u)' = \cos u$, $(\ln v)' = \frac{1}{v}$, то

$$y' = 3x^2 \cos u \frac{1}{v} = \frac{1}{\sin x^3} \cos x^3\, 3x^2.$$

Первый множитель в правой части последнего равенства получим в следующей формулировке: производная логарифма равна единице, деленной на то, от чего берется логарифм. Так как в этом примере дан $\ln \sin x^3$, то производная равна $\frac{1}{\sin x^3}$. Операция логарифмирования рассмотрена. Осталась функция $\sin x^3$. Второй множитель читаем так: производная синуса равна косинусу того, от чего берется синус. Поэтому производная равна $\cos x^3$. Операция взятия синуса рассмотрена. Остается x^3. Производная этого выражения равна $3x^2$, это и есть третий множитель.

Пример 18. Найдем $(\operatorname{arctg}^3 x)'$. Здесь последняя (вторая) операция — возведение в третью степень. Первая операция — взятие арктангенса. Поэтому сначала находим производную степени, получаем $3 \operatorname{arctg}^2 x$, а затем — производную арктангенса, получаем $\frac{1}{1+x^2}$. Перемножая полученные производные, будем иметь

$$y' = 3 \operatorname{arctg}^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 19. Найдем $(\operatorname{arctg} x^3)'$. Здесь последняя (вторая) операция — взятие арктангенса, его производная равна $\frac{1}{1+(x^3)^2}$. Первая операция есть возведение в куб, поэтому производная равна $3x^2$. Перемножая полученные выражения, будем иметь

$$(\operatorname{arctg} x^3)' = \frac{3x^2}{1+x^6}.$$

§ 5. Простейшие применения производной

1. Уравнение касательной

Как было показано в § 3, геометрический смысл производной состоит в том, что ее значение равно угловому коэффициенту касательной в данной точке к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$. Поэтому, если дана кривая $y=f(x)$ и на ней точка P с абсциссой x_1 и надо написать уравнение касательной, то поступают так. Вычисляют сначала ординату точки P, она равна $y_1=f(x_1)$. Через точку P проводят пучок прямых; уравнение пучка, как это было показано в гл. II, напишется следующим образом:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Но надо еще обеспечить касание, т. е. выбрать соответствующий угловой коэффициент. Угловой коэффициент касательной в данной точке равен значению производной, поэтому $k=f'(x_1)$.

Таким образом, уравнение касательной в точке $(x_1, f(x_1))$ к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, напишется так:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1).$$

Пример 1. Напишем уравнение касательной к параболе

$$y=x^2-4x+1$$

в точке P с абсциссой $x_1=3$. Вычислим ординату точки P: $y_1=3^2-4\cdot3+1=-2$. Ищем производную: $y'=2x-4$ — и находим ее значение при $x_1=3$: $y'_{x=3}=2\cdot3-4=2$. Уравнение касательной к параболе $y=x^2-4x+1$ в точке $(3, -2)$ будет иметь вид $y-(-2)=2(x-3)$ или

$$y+2=2(x-3).$$

Пример 2. Написать уравнение касательной к кривой $y=\sin x$. Здесь не указана точка, в которой происходит касание. Это надо понимать так: написать уравнение, из которого в любой момент можно получить уравнение касательной для любой точки синусоиды.

Возьмем точку $(x, \sin x)$; эта точка лежит на синусоиде. Найдем производную: $y'=\cos x$.

Чтобы не было путаницы, координаты точки, лежащей на касательной, обозначим большими буквами X и Y. Тогда уравнение касательной к синусоиде в любой ее точке запишется в виде

$$Y-\sin x=\cos x\,(X-x).$$

2. Уравнение нормали

Определение. *Нормалью к кривой называется прямая, проведенная через точку касания перпендикулярно касательной.*

Если обозначить угловой коэффициент касательной буквой k, а угловой коэффициент нормали k_1, то по условию перпендикулярности (гл. II) $k_1 = -\frac{1}{k}$. Поэтому уравнение нормали выглядит так:

$$Y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(X - x_1).$$

Пример 3. Напишем уравнение нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 2x + 3$, в точке, лежащей на этой кривой и имеющей абсциссу, равную 3.

Так как точка лежит на кривой, то, подставляя $x = 3$ в уравнение $y = x^2 - 2x + 3$, получим ее ординату $y = 6$. Найдем производную: $y' = 2x - 2$ — и ее значение при $x = 3$: $y'_{x=3} = 4$. Подставляя полученные данные в уравнение нормали, получим

$$Y - 6 = -\frac{1}{4}(X - 3).$$

3. Угол между двумя кривыми

Определение. *Углом между двумя кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым, проведенными в точке их пересечения.*

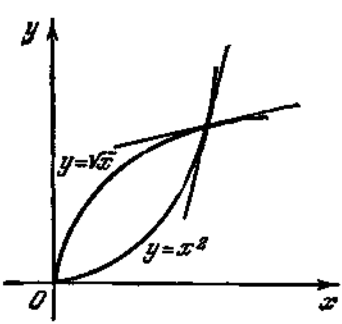

Рис. 49.

Пример 4. Найти угол между параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$ в точке их пересечения, лежащей внутри первой четверти.

Точки пересечения парабол найдем, решая совместно уравнения

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x. \end{cases}$$

Подставляя выражение y из первого уравнения во второе, получим уравнение $x^4 = x$, решая которое, найдем: $x = 0$ и $x = 1$; других действительных корней нет, так как уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ действительных корней не имеет. Для $x = 0$ и $x = 1$ найдем $y = 0$ и $y = 1$. Таким образом, мы нашли две точки пересечения в первой четверти: (0, 0) и (1, 1). Искомая точка имеет координаты (1, 1) (см. рис. 49).

Найдем производные от функции $y=x^2$ и от функции $y=\sqrt{x}$ (знак минус не берем, так как рассматривается первая четверть):

$$y'=2x,\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad (\text{см. стр. 95}).$$

Вычислив значения этих производных при $x=1$, получаем:

$$y'_{x=1}=k_1=2,\ y'_{x=1}=k_2=\frac{1}{2}.$$

Это угловые коэффициенты касательных. Угол между прямыми (касательными) определяется по формуле (1) из гл. II. Подставляя в нее значения k_1 и k_2, будем иметь

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}2},\ \text{т. е}\ \operatorname{tg}\gamma=-\frac{3}{4}.$$

Следовательно, угол между параболами в точке (1, 1) равен $\gamma=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$ (найден тупой угол).

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$ и на ней взята точка P с координатами $(x_1,\ f(x_1))$, то касательную к этой кривой в точке P можно построить следующим способом (рис. 50).

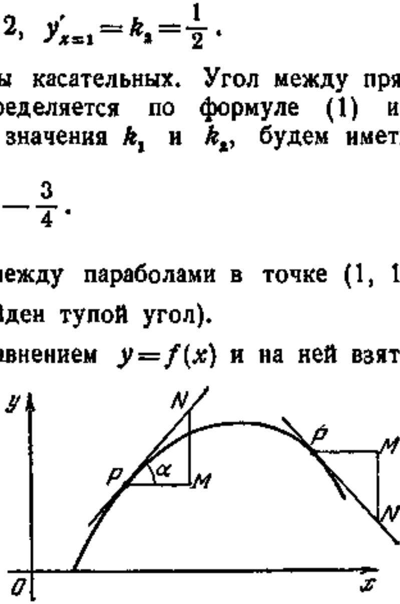

Рис. 50.

1. Из точки P проведем прямую, параллельную оси Ox, и на ней отложим отрезок PM, направленный в сторону возрастания абсцисс, длина которого равна единице.

2. Найдем производную функции $y=f(x)$, т. е.

$$y'=f'(x).$$

3. Вычислим ее значение при $x=x_1$, т. е. $y'_{x=x_1}=f'(x_1)$. Построим отрезок MN, равный $f'(x_1)$ как по величине, так и по направлению.

4. Соединяем точки P и N; получаем прямоугольный треугольник PMN, в котором $\angle PMN=\frac{\pi}{2}$, $\angle MPN=\alpha$,

$PM=1$, $MN=f'(x_1)$. Из этого треугольника находим

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\angle MPN=\frac{MN}{PM}=\frac{f'(x_1)}{1}=f'(x_1).$$

Отсюда заключаем, что PN является искомой касательной. В самом деле, эта прямая проходит через точку P и имеет угловой коэффициент, равный $f'(x_1)$.

§ 6. Вторая производная. Производные высших порядков

Определение. *Второй производной называется производная от производной.* Вторая производная обозначается y'' или $f''(x)$. Так, по определению

$$y''=f''(x)=[y']'=[f'(x)]'.$$

Пример 1. Вычислим вторую производную от функции $y=x^4$. Последовательно находим $y'=4x^3$, $y''=(4x^3)'=12x^2$.

Пример 2. Найдем вторую производную от функции $\sin x$. Находим $y'=\cos x$, поэтому $y''=-\sin x$.

Пример 3. Найдем y'', если $y=e^{2x}$. Найдем сначала $y'=2e^{2x}$, а затем $y''=2(e^{2x})'=4e^{2x}$.

Определение. *Производной порядка n называется производная от производной порядка $n-1$.*

Производная порядка n обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Исключение представляет третья, четвертая и пятая производные, которые чаще записывают y''', y^{IV}, y^{V}.

Пример 4. Вычислим производную четвертого порядка от функции $y=x^3$. Последовательно находим: $y'=3x^2$, $y''=(3x^2)'=6x$, $y'''=(6x)'=6$, $y^{\mathrm{IV}}=(6)'=0$.

Пример 5. Найдем y''', если $y=\frac{1}{x}$. Последовательно находим: $y=x^{-1}$, $y'=-x^{-2}$, $y''=(-1)(-2)x^{-3}=2x^{-3}$, $y'''=(2x^{-3})'=2(-3)x^{-4}$, $y'''=-\frac{6}{x^4}$. Итак, для того чтобы вычислить, скажем, производную десятого порядка, надо вычислить предварительно все производные меньших порядков.

Пример 6. Вычислим производную $y^{(10)}$ функции e^x. Вычисляем последовательно $y'=e^x$, $y''=e^x$, $y'''=e^x$. Очевидно, что и все производные высших порядков будут равны e^x, так что и $y^{(10)}=e^x$.

Если точка движется прямолинейно, но неравномерно, то скорость ее изменяется. Следовательно, можно говорить о скорости изменения скорости. Скорость изменения скорости называется ускорением и обозначается буквой a. Так как скорость выражается при помощи производной, то ускорение будет выражаться через производную от производной, т. е. ускорение есть вторая производная от пути по времени.

Пример 7. Тело движется по оси Ox. Расстояние x от начала координат изменяется по закону $x = \sin t$ (здесь t обозначает время). Найти скорость и ускорение тела.

Скорость v равна производной, поэтому $v = \cos t$, а ускорение равно второй производной, поэтому $a = -\sin t$.

Упражнения к гл. VII

Найти производные следующих функций:

1. $y = 2x^7 + 6$.
2. $y = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.
3. $y = x^2 \sin x$.
4. $y = \cos 2x$.
5. $y = \operatorname{ctg} 5x$.
6. $y = e^{13x}$.
7. $y = (x^2 + 1)^3$.
8. $y = \cos^2 x$.
9. $y = \operatorname{tg}^2 x$.
10. $y = \ln \cos x$.
11. $y = e^{\cos x}$.
12. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{5}$.
13. $f(x) = \sin(x^2 + x^3)$.

14. Вычислить $f'(3)$, если $f(x) = x^3 + x^2$.
15. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
16. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = \arcsin x$.
17. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = \frac{x - 1}{x^3}$.
18. Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{4}$.
19. Написать уравнение касательной к кривой $y = e^x$ в точке $(0, 1)$.
20. Написать уравнение касательной к параболе $y = 4x^2 - 1$ в точке $(1, 3)$.
21. Написать уравнение нормали к синусоиде $y = \sin x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{4}$.
22. Найти угол между кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в точке их пересечения.
23. Найти производные следующих функций: а) y^{IV}, если $y = x^4$; б) y''', если $y = \cos x$; в) $(\ln x)'''$; г) $f''(x)$, если $f(x) = x^{10} + 2x + 1$.

ГЛАВА VIII

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Как уже неоднократно замечалось, в окружающем нас мире, во всей деятельности человека, науке, технике, да и в обыденной жизни, встречаются функциональные зависимости. Понятие производной является основным при их изучении.

§ 1. Возрастание и убывание функции

Определение. *Функция $f(x)$ называется возрастающей на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если для любых значений независимого переменного x_1 и x_2, взятых на этом отрезке, всегда из условия $x_1 < x_2$ вытекает, что $f(x_1) < f(x_2)$.*

Таким образом, функция называется возрастающей, если большему значению независимого переменного соответствует большее значение функции. Ясно, что для возрастающей функции меньшему значению независимого переменного соответствует и меньшее значение функции (рис. 51).

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Чем больше положительное x, тем больше и его квадрат, т. е. если $0 < x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$. Следовательно, функция $y = x^2$ возрастает на любом отрезке, лежащем правее начала координат.

Определение. *Функция $f(x)$ называется убывающей на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если для любых значений x_1 и x_2 независимого переменного, взятых на этом отрезке, всегда из условия $x_1 < x_2$ вытекает, что $f(x_1) > f(x_2)$*, т. е. функция называется убывающей, если большему значению независимого переменного соответствует меньшее значение функции. Ясно, что для убывающей функции меньшему значению независимого переменного соответствует большее значение функции (рис. 52).

Возрастающая функция имеет график, идущий слева направо вверх. Убывающая функция имеет график, идущий слева направо вниз.

Пример 2. Рассмотрим снова функцию $y=x^2$. Так как с увеличением абсолютной величины отрицательное число уменьшается, то функция $y=x^2$ является убывающей на любом отрезке, расположенном слева от начала координат.

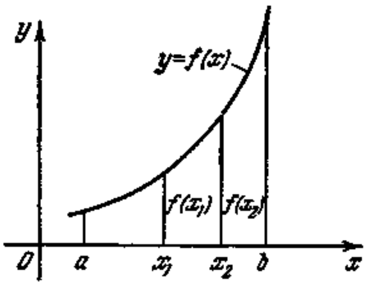

Рис. 51.

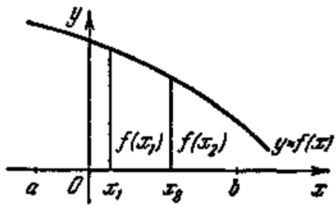

Рис. 52.

Если функция $f(x)$, имеющая производную для каждого значения $x\,(a<x<b)$, возрастает, то ее производная положительна, но может обращаться в нуль в отдельных точках. В самом деле, пусть x_1 — произвольное значение, взятое на отрезке $a<x<b$. Дадим x_1 приращение $h>0$ и найдем соответствующее приращение функции, оно равно

$$\Delta y=f(x_1+h)-f(x_1)>0,$$

так как функция возрастающая.

Если же дадим x_1 отрицательное приращение $h<0$, то приращение функции $\Delta y=f(x_1+h)-f(x_1)<0$, т. е. будет отрицательно, в силу возрастания функции.

Таким образом, для возрастающей функции приращение независимого переменного и приращение функции имеют всегда одинаковые знаки. Следовательно, дробь $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ всегда положительна, а поэтому ее предел, который является значением производной при $x=x_1$, или положителен, или равен нулю.

Если функция $f(x)$ убывает на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и имеет для каждого значения x производную, то ее производная при каждом значении x или отрицательна, или равна нулю. Это вытекает из того, что для убывающей функции знаки приращения функции и приращения независимого переменного всегда противоположны, поэтому дробь $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ всегда имеет знак минус, а следовательно, ее предел отрицателен или равен нулю.

Теперь выясним, что можно сказать о функции, если известен знак ее производной. Напомним, что производная $f'(x)$ есть предел дроби $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при условии, что $h \longrightarrow 0$. Поэтому, если производная не равна нулю, то ее знак при достаточно малых h совпадает со знаком $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (см. гл. VI, § 4, свойство 5).

Таким образом, если $f'(x)>0$, то $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$, т. е. $f(x+h)-f(x)$ и h одного знака. Функция в этом случае возрастает.

Если $f'(x)<0$, то $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0$, т. е. знаки $f(x+h)-f(x)$ и h различны. Функция в этом случае убывает. Эти два последних предложения имеют большое значение для дальнейшего курса.

Определение. *Значение независимого переменного, при котором производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называется критическим значением.*

Пример 3. Найдем критические значения для функции

$$f(x)=2x^3-3x^2-36x.$$

Ее производная $f'(x)=6x^2-6x-36$. Приравняв производную нулю, получим $6x^2-6x-36=0$, откуда $x^2-x-6=0$. Решая это уравнение, находим:

$$x_1=-2, \quad x_2=3.$$

Пример 4. Найдем критические значения функции $y=\frac{x^2}{x+2}$. Так как $y'=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$, то те значения, при которых производная равна нулю, найдутся из уравнения $x(x+4)=0$. Они равны $x=-4$, $x=0$. Производная не существует при тех значениях x, при которых знаменатель обращается в нуль, т. е. $(x+2)^2=0$, откуда находим $x=-2$. Итак, рассматриваемая функция имеет следующие критические значения:

$$x_1=-4, \quad x_2=-2, \quad x_3=0.$$

В дальнейшем придется часто пользоваться следующим важным свойством: *изменение знака любой величины может произойти либо когда она проходит через нуль, либо когда она претерпевает разрыв* (рис. 53).

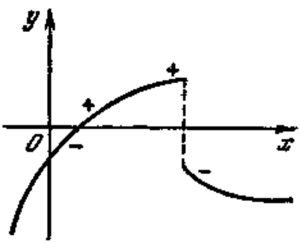

Рис. 53.

Так, например, функция $y=3x-6$ при $x=1$ имеет значение $3\cdot 1-6=-3$, а при $x=3$ значение $3\cdot 3-6=3$, т. е. эта функция меняет знак. В силу указанного свойства она должна пройти через нуль (так как она непрерывна). Действительно, при $x=2$ она равна нулю.

Функция $y=\frac{1}{x}$ при значении $x=-1$ равна -1, а при $x=4$ принимает значение $\frac{1}{4}$. На основании указанного свойства можно утверждать, что между -1 и 4 функция или обращается в нуль, или терпит разрыв. Действительно, при $x=0$ она терпит разрыв.

Значит, производная может сменить знак только при переходе через критические значения.

§ 2. Исследование функций на возрастание и убывание

Изложенное позволяет производить исследование функций на возрастание и убывание. Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=2x^3-3x^2-12x-6$. Для того чтобы выяснить, где эта функция возрастает и где убывает, нужно определить, где ее производная положительна и где отрицательна. Так как смена знаков возможна только при переходе через критические значения, то надо прежде всего найти эти значения. Находим производную: $y'=6x^2-6x-12$. Критическими значениями будут те, в которых производная обращается в нуль. Приравнивая производную нулю и решая полученное уравнение, находим критические значения: $x_1=-1$, $x_2=2$. Других критических значений нет, потому что производная существует всюду. Таким образом, производная может изменить знак только при переходе независимого переменного через $x_1=-1$ и $x_2=2$. Эти значения разбивают ось x на три участка: 1) $-\infty<x<-1$, 2) $-1<x<2$, 3) $2<x<+\infty$.

При изменении независимого переменного на каждом из этих участков производная сохраняет знак (в противном случае она должна была бы обратиться в нуль еще раз, а этого нет). Для того чтобы узнать, какой знак имеет производная на рассматриваемом участке, возьмем произвольное значение x, принадлежащее этому участку, и найдем знак производной при этом значении x. Так, например, на участке $-\infty<$ $<x<-1$ возьмем $x=-10$, получим $y'_{x=-10}=f'(-10)=600+60-12>0$. Для участка $-1<x<+2$ возьмем число $x=0$, получим $f'(0)=-12<0$ и, наконец, для участка $2<x<+\infty$ возьмем число $x=10$, получим $f'(10)=$ $=600-60-12>0$. Итак, при изменении x от $-\infty$ до -1 производная положительна, поэтому (см. § 1 этой главы) функция возрастает. При изменении x от -1 до 2 производная отрицательна, следовательно, функция убывает. И наконец, при изменении x от 2 до ∞ производная положительна, значит, функция возрастает (рис. 54).

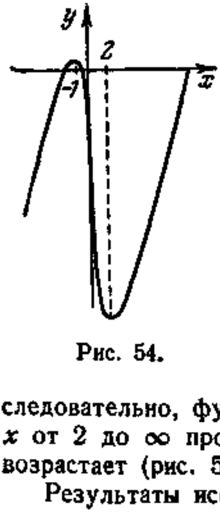

Рис. 54.

Результаты исследования сводим в таблицу:

x	$-\infty<x<-1$	-1	$-1<x<2$	2	$2<x<+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	возраст.	1	убыв.	−26	возраст.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y=(x-1)^3$. Ее производная $y'=3(x-1)^2$ обращается в нуль только при $x=1$

и все время положительна, т. е. y' не меняет знака. Таким образом, функция y всегда возрастает (рис. 55). Приведем таблицу, отражающую исследование:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < +\infty$
y'	+	0	+
y	возраст.	0	возраст.

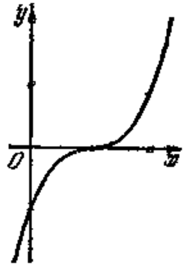

Рис. 55.

Исследование функций на возрастание и убывание позволяет часто решать задачи о нахождении максимальных и минимальных значений, которыми мы и займемся в следующем параграфе.

§ 3. Максимальные и минимальные значения функции

Значение функции $f(c)$ назовем ***максимальным*** или ***максимумом***, если оно больше всех значений функции $f(x)$ при x, достаточно мало отличающихся от c. Иначе говоря, можно найти отрезок, содержащий c в качестве внутренней точки и такой, что при любом x, взятом на этом отрезке $(x \neq c)$, будет иметь место неравенство $f(c) > f(x)$.

Значение функции $f(c)$ называется ***минимальным*** или ***минимумом***, если оно меньше всех значений функции $f(x)$ при x, достаточно мало отличающихся от c, т. е. можно найти отрезок, содержащий c в качестве внутренней точки и такой, что при любом x, взятом на этом отрезке $(x \neq c)$, будет выполнено неравенство $f(c) < f(x)$.

Максимальные и минимальные значения называются ***экстремальными*** значениями функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = (x-3)^2$. Эта функция равна нулю при $x = 3$, а при всех остальных значениях x она положительна. Следовательно, при $x = 3$ она имеет минимум, равный нулю.

Пример 2. Для функции $f(x) = \sin x$ значение $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ является максимальным, так как $\sin\frac{\pi}{2} > \sin x$ для всех x, отличающихся от $\frac{\pi}{2}$ меньше чем на 2π, т. е. в этом случае «достаточно мало» означает меньше, чем 2π. Конечно, функция $\sin x$ имеет не один максимум.

Пример 3. Докажем, что функция $f(x)=x^2-4x-5$ имеет минимум при $x=2$. Для этого покажем, что $f(2)<f(x)$ или $f(x)-f(2)>0$. В самом деле, $f(x)-f(2)=(x^2-4x-5)-(2^2-4\cdot2-5)=x^2-4x-5+9=x^2-4x+4=(x-2)^2>0$.

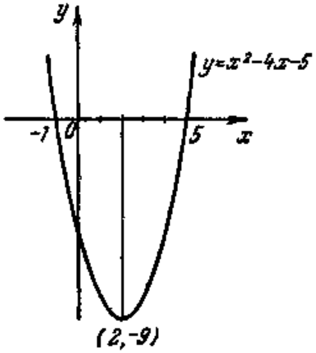

Рис. 56.

Здесь нам удалось доказать, что неравенство $f(2)<f(x)$ справедливо для всех значений x, а не только достаточно близких к числу 2. Можно сказать, что в данном случае «достаточно близко» означает на всей оси Ox (рис. 56).

Вообще же доказать существование, а тем более найти экстремальные значения является трудной задачей. При решении этой задачи помогают следующие теоремы.

Теорема 1 (необходимые условия существования экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет экстремум при $x=c$, то ее производная при $x=c$ или равна нулю, или вовсе не существует.*

Доказательство этой теоремы проведем только для случая максимума (для случая минимума доказательство повторяется, только знаки неравенств меняются на обратные).

Итак, пусть функция $f(x)$ при $x=c$ имеет максимум, т. е. для всех x, достаточно близких к c, выполнено неравенство $f(c)>f(x)$. Это неравенство перепишем, положив $x=c+h$, где h достаточно мало по абсолютной величине и любое по знаку. Тогда $f(c)>f(c+h)$ или $f(c+h)-f(c)<0$. Если $h>0$, то

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0; \qquad (*)$$

если $h<0$, то

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0. \qquad (**)$$

Функция $f(x)$ при $x=c$: 1) или не имеет производной, 2) или имеет производную. В случае 1) теорема доказана. Если же имеет место случай 2), то, по определению производной, она является определенным числом, равным

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

В силу (*) производная $f'(c)$ не может быть положительным числом. Она или отрицательна, или равна нулю. А в силу (**) производная не может быть отрицательной, она или положительна, или равна нулю.

Так как при отыскании производной h должно принимать как положительные, так и отрицательные значения, то для того, чтобы не получить противоречия, производная необходимо должна быть равна нулю. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает необходимые условия для существования экстремума. Это значит, что если экстремум существует, то одно из указанных условий наверное выполнено. Однако может случиться, что одно из этих условий выполнено, а экстремум не существует. Приведем пример.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x)=(x-2)^3+1$. Ее производная $y'=3(x-2)^2$ обращается в нуль при $x=2$. Вычислим $f(2)=(2-2)^3+1=1$, но при $x<2$ $f(x)$ имеет числовые значения, меньшие единицы, а при $x>2$ ее числовые значения больше, чем единица. Таким образом, нельзя указать отрезка, содержащего внутри себя $x=2$ и такого, чтобы на нем было всегда $f(2)>f(x)$ или $f(2)<f(x)$, т. е. $f(2)$ не является экстремальным значением.

Значит, доказанная теорема позволяет найти те значения независимого переменного, при которых возможны экстремумы, но утверждать наличие экстремумов на основании этой теоремы нельзя. Для отыскания экстремумов служит теорема, дающая достаточные условия существования экстремумов.

Предварительно условимся об употреблении некоторых выражений. Если функция задана на отрезке, содержащем $x=c$, и если при $x<c$ функция имеет отрицательные значения, а при $x>c$ положительные значения, то будем говорить, что «при переходе через $x=c$ функция меняет знак минус на плюс» (причем при $x=c$ функция может и не существовать).

После этого разъяснения смысл фразы «при переходе через $x=c$ функция меняет знак плюс на минус» становится также ясным. При употреблении этих выражений мы не обращаем внимания на существование функции при $x=c$.

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке, содержащем $x=c$, и если производная $f'(x)$ этой функции при переходе через $x=c$ меняет знак плюс на минус, то функция при $x=c$ имеет максимум; если же производная при переходе через $x=c$ меняет знак минус на плюс, то функция при $x=c$ имеет минимум.*

Рассмотрим случай изменения знака плюс на минус. По условию при всех значениях x, меньших c, производная положительна; это значит, что функция возрастает, т. е. при $x<c$ имеем $f(x)<f(c)$. При x, больших c, производная отрицательна, поэтому функция убывает, т. е. при $x>c$ имеем $f(c)>f(x)$. Значит, всегда на отрезке имеем $f(c)>$ $>f(x)$, а это и значит, что $f(c)$ — максимальное значение функции.

Случай изменения знака минус на плюс рассматривается аналогично.

Пример 5. Найдем экстремальные значения функции $y=x^4-8x^2+4$. Ее производная равна $y'=4x^3-16x$; она, как известно, непрерывна; поэтому критические значения найдем, приравнивая производную нулю и решая полученное уравнение:

$$4x^3-16x=0;\quad 4x(x^2-4)=0;\quad x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2.$$

В результате получены три критических значения (рис. 57).

Исследуем знаки производной так, как это было показано раньше, и сведем результаты в таблицу:

x	$-\infty<x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x<+2$	$+2$	$+2<x<+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	убыв.	-12 min	возраст.	4 max	убыв.	-12 min	возраст.

Отсюда видно, что при переходе через $x=-2$ производная меняет знак минус на плюс, значит, при $x=-2$ функция имеет минимум. При переходе через $x=0$ производная меняет знак плюс на минус, поэтому при $x=0$ функция имеет максимум. При переходе через $x=+2$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому при $x=2$ функция имеет минимум. Минимум при $x=-2$ равен -12, максимум при $x=0$ равен 4, и минимум при $x=2$ равен -12.

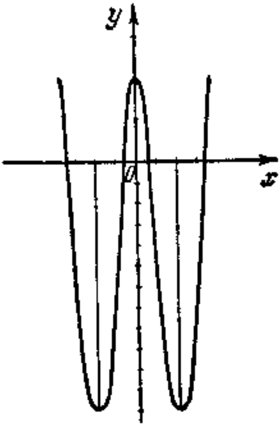

Рис. 57.

Пример 6. Найдем экстремумы функции $y=3\sin 2x+1$, рассматриваемой на отрезке $0\leqslant x<\pi$. Производная $y'=6\cos 2x$ обращается в нуль при $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{3}{4}\pi$ (учитываем только значения, лежащие на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$).

Исследуем знаки производной и результаты сведем в таблицу:

x	$0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi<x<\pi$
y'	+	0	—	0	+
y	возраст.	4 max	убыв.	—2 min	возраст.

Из таблицы видно, что функция $y=3\sin 2x+1$ при $x=\frac{\pi}{4}$ имеет максимум, равный 4, а при $x=\frac{3}{4}\pi$ — минимум, равный -2.

Пример 7. Найдем экстремумы функции $y=x^{\frac{2}{3}}$. Ее производная, равная $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, нигде не обращается в нуль, но при $x=0$ она не существует, так как знаменатель при этом обращается в нуль. Поэтому единственное критическое значение равно нулю. Исследуем, меняет ли производная при переходе через нуль свой знак. Если $x<0$, то производная имеет знак минус; если же $x>0$, то производная имеет знак плюс, так что при переходе через нуль производная меняет знак — на $+$. Следовательно, функция при $x=0$ имеет минимум, равный нулю (см. таблицу и рис. 58).

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<+\infty$
y'	$-$	нет	$+$
y	убыв.	0 min	возраст.

Пример 8. Железная дорога проложена по берегу моря (рис. 59). На траверзе пункта B находится остров C (на траверзе—это значит на перпендикуляре, проведенном

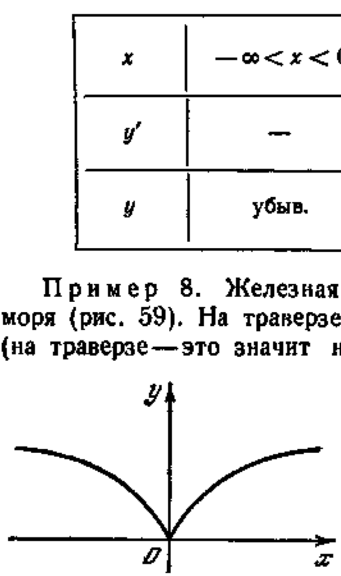

Рис. 58.

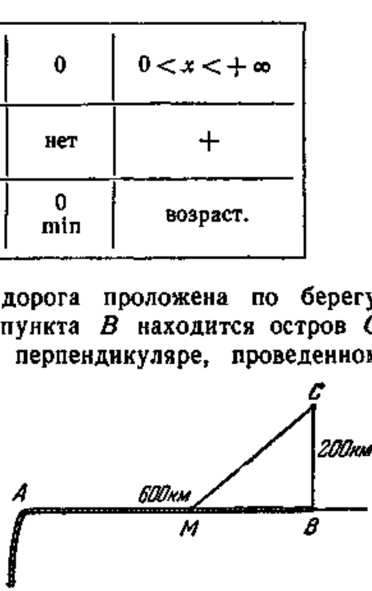

Рис. 59.

из точки B к линии берега). Остров C снабжается продуктами через город A, расположенный на расстоянии 600 *км* по железной дороге от пункта B. Расстояние $BC=200$ *км*. Грузы из A на остров можно отправлять прямо морем или комбинированным путем, сначала по железной дороге, а затем морем. Скорость перевозки по железной дороге равна 50 *км/час*, а по морю 30 *км/час*. Стоимость перевозки единицы груза на 1 *км* по железной дороге в два раза выше, чем по морю.

Нужно определить место перевалочного пункта M с железнодорожного транспорта на морской так, чтобы перевозка из A на остров C происходила в кратчайшее время. Кроме того, надо определить положение другого перевалочного пункта, который обеспечил бы самую дешевую перевозку. Погрузочные работы в расчет не принимаются.

Обозначим через x расстояние AM. Тогда $MB = 600 - x$, и из прямоугольного треугольника MBC находим: $MC = \sqrt{(600-x)^2 + 200^2}$. Время, необходимое для перевозки по железной дороге $t_ж = \frac{x}{50}$. Время, затраченное на перевозку морем, обозначим $t_м$; оно равно $\frac{\sqrt{(600-x)^2+200^2}}{30}$. Следовательно, время, затраченное на всю перевозку из A на остров C, равно

$$t = t_ж + t_м = \frac{x}{50} + \frac{\sqrt{(600-x)^2+200^2}}{30}.$$

Надо определить минимум этой функции в зависимости от положения x перевалочного пункта M. Находим производную:

$$t' = \frac{1}{50} + \frac{-(600-x)}{30\sqrt{(600-x)^2+200^2}} = \frac{3\sqrt{(600-x)^2+200^2} - 5(600-x)}{150\sqrt{(600-x)^2+200^2}}.$$

Приравнивая производную нулю, будем иметь

$$3\sqrt{(600-x)^2+200^2} - 5(600-x) = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$3\sqrt{(600-x)^2+200^2} = 5(600-x),$$

$$(600-x)^2 + 200^2 = \frac{25}{9}(600-x)^2,$$

$$\frac{16}{9}(600-x)^2 = 200^2,$$

$$\frac{4}{3}(600-x) = \pm 200,$$

$$600 - x = \pm 150,$$

$$x = 600 \mp 150,$$

$$x_1 = 450 \text{ км}, \quad x_2 = 750 \text{ км}.$$

Найдены два критических значения. Однако по смыслу задачи надо взять только 450 *км*. Этим первая часть задачи решена.

Вторая часть не требует никаких дополнительных вычислений. В самом деле, путь AC короче всякого ломаного пути AMC и проходит по морю, поэтому это будет самый дешевый путь. Итак, самая дешевая перевозка осуществится, если перевалочный пункт сделать в городе A.

В заключение параграфа рассмотрим задачу, имеющую важное физическое значение. Если в некоторой однородной среде (например, воздухе, воде, стекле и т. д.) прямолинейно и равномерно движется точка M со скоростью v, то путь s, пройденный точкой M за промежуток времени t, равен $s=vt$. Теперь сформулируем задачу.

Рис. 60.

Задача 1. Две различные однородные среды соприкасаются по прямой линии (рис. 60). Точка M в каждой из сред может двигаться прямолинейно и равномерно: в первой среде со скоростью v_1, во второй — со скоростью v_2 ($v_1<v_2$). Точка A_1 лежит в первой среде, а точка A_2 — во второй. Требуется в кратчайшее время перевести точку M из A_1 в A_2, а также определить вид ломаной линии, по которой при этом должна двигаться точка M.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой, являющейся границей сред, а ось Oy проведем через точку A_1 перпендикулярно оси Ox. В этой системе координат абсцисса точки A_1 равна нулю, а ордината — некоторому числу y_1, так что $A_1(0,\ y_1)$. Координаты точки A_2 в этой же системе координат обозначим x_2, y_2, так что $A_2(x_2,\ y_2)$.

Пусть точка M, выйдя из A_1, приходит в точку $B(x,\ 0)$, лежащую на границе сред. Тогда путь s_1, пройденный в первой среде, можно найти как расстояние между точками A_1 и B, т. е. $s_1=\sqrt{x^2+y_1^2}$. Путь s_2 от точки B до A_2, пройденный во второй среде, выразится так: $s_2=\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}$. Время движения в первой среде

$t_1=\frac{\sqrt{x^2+y_1^2}}{v_1}$. Время движения во второй среде $t_2=$ $=\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{v_2}$. Следовательно, время t, затраченное на прохождение всего пути из A_1 в A_2, равно

$$t=t_1+t_2=\frac{\sqrt{x^2+y_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{v_2}.$$

Меняя положение точки $B(x, 0)$ на оси Ox, мы будем менять время t. Таким образом, в задаче требуется определить минимум функции t. Для этого найдем ее производную:

$$t'=\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+y_1^2}}-\frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}.$$

Приравнивая производную нулю, получим

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+y_1^2}}-\frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}=0,$$

откуда

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+y_1^2}}=\frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}. \qquad (*)$$

Но

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}=\frac{OB}{A_1B}=\cos\angle OBA_1;$$

$$\frac{x_3-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}=\frac{BC}{BA_2}=\cos\angle CBA_2.$$

Поэтому равенство (*) можно переписать так:

$$\frac{\cos\angle OBA_1}{v_1}=\frac{\cos\angle CBA_2}{v_2}$$

или

$$\frac{\cos\angle OBA_1}{\cos\angle CBA_2}=\frac{v_1}{v_2}. \qquad (**)$$

Проведем через точку B прямую PN, перпендикулярную оси Ox, и обозначим $\angle A_1BN=\alpha$, $\angle A_2BP=\beta$. Так как $\angle A_1BN + \angle OBA_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\angle A_2BP + \angle CBA_2 = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\angle OBA_1 = \sin\alpha$, $\cos\angle CBA_2 = \sin\beta$ и равенство (**) примет вид

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (***)$$

Если угол α назовем углом падения, а угол β — углом преломления, то равенство (***) даст известный из физики закон преломления света. Здесь, как говорят, осуществляется «минимальный принцип».

§ 4. Выпуклость и вогнутость линии. Точка перегиба

Возьмем произвольную точку P на кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, и проведем через точку P касательную к этой кривой. Тогда могут представиться три случая (рис. 61): 1) вблизи точки P кривая расположена ниже касательной (точка P_1), 2) вблизи точки P кривая расположена выше касательной (точка P_2), 3) кривая пересекает касательную в точке P (точка P_3). В первом случае будем говорить, что кривая *выпукла* вблизи точки P, во втором, — что кривая *вогнута* вблизи точки P, и в третьем, — что кривая имеет *точку перегиба* P. Таким образом, *точки перегиба — это точки, в которых выпуклость сменяется вогнутостью или наоборот.*

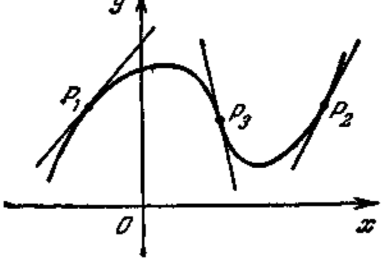

Рис. 61.

Чтобы иметь возможность судить по уравнению $y=f(x)$ о выпуклости, вогнутости и наличии точек перегиба, рассмотрим вторую производную $f''(x)$.

Предположим, что вторая производная $f''(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x)<0$. Так как вторая производная по определению есть производная от производной $f'(x)$, то, применяя результат § 1, заключаем, что если $f''(x)<0$, то производная $f'(x)$ убывает. А это значит, что с возрастанием абсциссы угол наклона касательной к оси Ox уменьшается.

На рис. 62 изображена кривая, у которой угол наклона касательной убывает с возрастанием абсциссы точки касания. Значит, для нее $f''(x) < 0$. Как видно из рис. 62, этот случай соответствует выпуклой кривой.

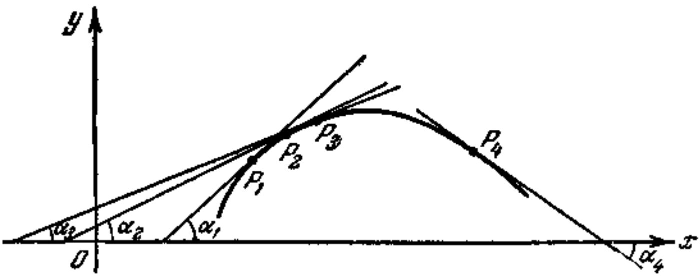

Рис. 62.

Если вторая производная положительна, т. е. $f''(x) > 0$, то производная $f'(x)$ возрастает. Это значит, что с увеличением абсциссы угол наклона касательной к оси Ox увеличивается. Из рис. 63 видно, что в этом случае кривая вогнута.

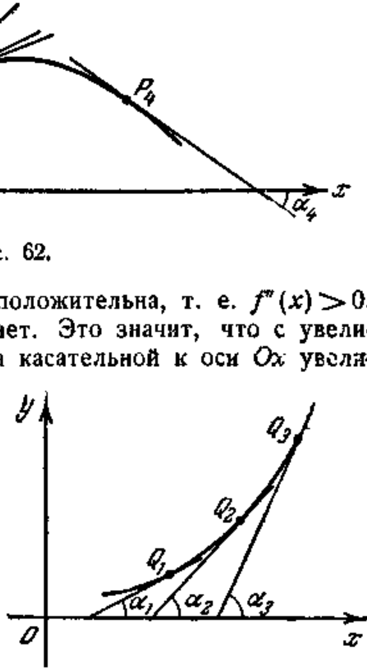

Рис. 63.

Таким образом, случай выпуклости соответствует неравенству $f''(x) < 0$, случай вогнутости соответствует неравенству $f''(x) > 0$.

В тех точках, в которых выпуклость сменяется вогнутостью, т. е. в точках перегиба, $f''(x) = 0$.

Пример 1. Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = x^{\frac{2}{3}}$ (см. пр. 7 § 3). Производная равна

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}},$$

вторая производная равна

$$y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9 \sqrt[3]{x^4}}.$$

Вторая производная всегда отрицательна, поэтому кривая выпукла, а так как при $x=0$ производная не существует, то график имеет вид, представленный на рис. 58.

Значения независимого переменного, при которых вторая производная или равна нулю, или не существует, называются критическими значениями для второй производной. Вторая производная может сменить знак только при переходе через критические значения (ср. § 1). Значит, точки перегиба могут быть только при критических значениях независимого переменного (ср. необходимые условия существования экстремума).

Исследование выпуклости и вогнутости кривой производится по плану, похожему на план исследования экстремумов. Покажем на примере, как это делается.

Пример 2. Исследуем на выпуклость и вогнутость кривую, заданную уравнением

$$y=x^4-6x^2. \qquad (*)$$

Сначала найдем первую производную от функции (*): $y'=4x^3-12x$, а затем вторую производную:

$$y''=12x^2-12=12(x^2-1).$$

Находим критические значения для второй производной. Так как она существует всюду, то критические значения найдем из уравнения

$$12(x^2-1)=0, \quad x^2-1=0, \quad x_1=-1, \quad x_2=+1.$$

Найдены два критических значения. Эти значения разбивают ось x на три участка: 1) $-\infty<x<-1$, 2) $-1<x<+1$, 3) $+1<x<+\infty$. На первом участке вторая производная имеет знак плюс, на втором знак минус и на третьем знак плюс.

Значит, при переходе через $x=-1$ вторая производная меняет знак плюс на минус, т. е. при $x=-1$ имеется точка перегиба. При переходе через $x=+1$ вторая производная меняет знак минус на плюс, значит, и здесь имеется точка перегиба.

Результаты проведенных рассуждений сведем в таблицу:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +1$	$+1$	$+1 < x < +\infty$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	вогнут.	-5 т. п.	выпукл.	-5 т. п.	вогнут.

§ 5. Общий план исследования функций и построения графиков

Изложенное в предыдущих параграфах позволяет провести качественное исследование функции и построить ее график. Под качественным исследованием понимают такое исследование, которое позволяет выяснить существенные свойства функции, но не претендует, например, на нахождение точных значений функции. Приведем примеры такого исследования.

Пример 1. Построим график функции

$$y = \frac{(x-4)^2(x+2)}{8}. \tag{*}$$

1. Так как все действия, указанные в правой части равенства (*), выполнимы при любых значениях независимого переменного x, то функция существует всюду, т. е. ее область существования $-\infty < x < +\infty$.

2. Предельные значения при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-4)^2(x+2)}{8} = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-4)^2(x+2)}{8} = +\infty.$$

3. Вычисляем первую и вторую производные:

$$y' = \frac{1}{8}\{[(x-4)^2]'(x+2) + (x-4)^2(x+2)'\} =$$
$$= \frac{1}{8}\{2(x-4)(x+2) + (x-4)^2\} =$$
$$= \frac{x-4}{8}[2x+4+x-4] = \frac{3x(x-4)}{8};$$

$$y'' = \frac{3}{8}[x'(x-4) + x(x-4)'] = \frac{3}{8}[x-4+x] = \frac{3}{4}(x-2).$$

4. Находим критические значения для y' и y'':

$$y'=0; \qquad \frac{3x(x-4)}{8}=0, \quad x=0, \quad x=4;$$

$$y''=0; \qquad \frac{3}{4}(x-2)=0, \quad x=2.$$

5. Нумеруем критические значения в порядке возрастания:

$$x_1=0, \quad x_2=2, \quad x_3=4.$$

6. Составляем таблицу:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<4$	4	$4<x<+\infty$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	возраст. выпукл.	4 max	убыв. выпукл.	2 т. п.	убыв. вогнут.	0 min	возраст. вогнут.

7. Строим график (рис. 64).

Пример 2. Исследовать и построить график функции

$$y=\frac{x^2+1}{x}.$$

1. Находим область существования функции. Так как деление на нуль не имеет смысла, то область существования не содержит $x=0$, т. е. область существования состоит из двух кусков: $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$. Значит, и график функции состоит также из двух кусков.

2. Исследуем поведение функции в удаленных частях плоскости и при приближении к границе области существования.

Так как степень числителя больше степени знаменателя (см. гл. VI, пр. 8), то

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty.$$

Если x приближается к нулю слева, т. е. остается отрицательным, то знаменатель дроби отрицательный, в то время как числитель приближается к $+1$, поэтому вся дробь отрицательна и неограниченно увеличивается по абсолютной величине. Это значит, что

$$\lim_{x \to -0} \frac{x^2+1}{x} = -\infty.$$

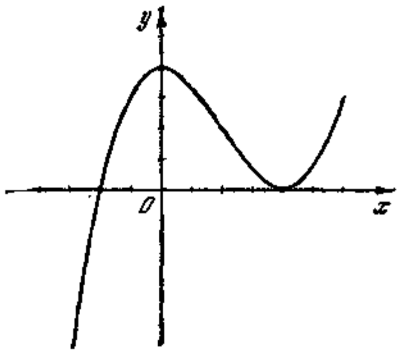

Рис. 64.

Если x приближается к нулю справа, т. е. остается положительным, то знаменатель дроби будет положительным, в то время как числитель приближается к $+1$, поэтому вся дробь положительна и неограниченно возрастает. Это значит, что

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^2+1}{x} = +\infty.$$

3. Находим первую и вторую производные:

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2},$$

$$y'' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)\,2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

4. Находим критические значения для первой и второй производных:

а) y' не существует при $x=0$;

б) $y'=0$; $x^2-1=0$, $x=\pm 1$;

в) y'' не существует при $x=0$;

г) y'' не может быть равна нулю ни при каких значениях x.

5. Нумеруем критические значения для первой и второй производных в порядке их возрастания:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +1.$$

6. Составляя таблицу, отмечаем в ней знаки производных, тем самым мы исследуем функцию на возрастание

и убывание, выпуклость и вогнутость, находим экстремумы и точки перегиба:

x	$-\infty<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<+1$	$+1$	$+1<x<+\infty$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	не сущ.	$+$	$+$	$+$
y	возраст. выпукл.	-2 max	убыв. выпукл.	не сущ.	убыв. вогнут.	2 min	возраст. вогнут.

7. Строим график (рис. 65).

Пример 3. Исследовать и построить график функции

$$y=e^{-(x-1)^2}. \qquad (*)$$

1. Область существования. Так как все действия, указанные в правой части равенства (*), выполнимы при любом значении независимого переменного x, то областью существования является вся ось Ox; это записываем так:

$$-\infty<x<+\infty.$$

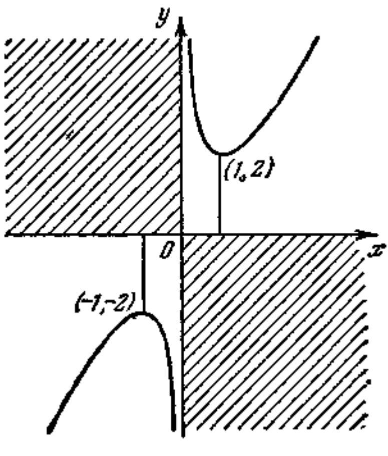

Рис. 65.

Значит, график функции (*) состоит из одного куска.

2. Поведение функции в удаленных частях плоскости. Найдем предел функции при неограниченном возрастании независимого переменного:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{(x-1)^2}}=0$$

(см. гл. VI, конец § 3 и конец § 5).

Найдем предел функции при неограниченном убывании независимого переменного:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{(x-1)^2}} = 0.$$

3. Находим первую и вторую производные:

$$y' = -2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

$$y'' = -2e^{-(x-1)^2} + 4(x-1)^2 e^{-(x-1)^2} =$$

$$= 2e^{-(x-1)^2}\left[2(x-1)^2 - 1\right].$$

4. Находим критические значения для первой и второй производных:

а) первая производная существует всюду;

б) из $y' = 0$ находим $-2(x-1)e^{-(x-1)^2} = 0$; $x-1=0$; $x=1$;

в) вторая производная существует всюду;

г) полагаем $y''=0$ и решаем полученное уравнение $2e^{-(x-1)^2}[2(x-1)^2-1]=0$:

$$2(x-1)^2 - 1 = 0, \quad (x-1)^2 = \frac{1}{2},$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Пронумеруем критические значения для первой и второй производных в порядке их возрастания:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Составляем таблицу, в которой отмечаем знаки производных и тем самым исследуем функцию на возрастание и убывание, выпуклость и вогнутость и наличие экстремумов.

7. Строим график (см. таблицу и рис. 66 на стр. 132).

x	$-\infty<x<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$	1	$1<x<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	возраст. вогнут.	$e^{-\frac{1}{2}}$ т. п.	возраст. выпукл.	1 max	убыв. выпукл.	$e^{-\frac{1}{2}}$ т. п.	убыв. вогнут.

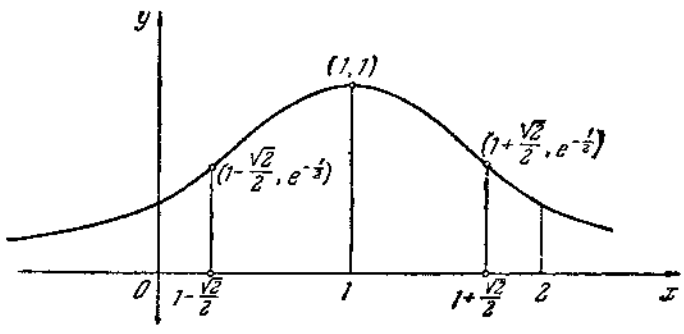

Рис. 66.

§ 6. Связь между графиком функции и графиком ее производной

Пусть задана функция $f(x)$, имеющая производную $f'(x)$. Рассмотрим, во-первых, кривую, определяемую уравнением $y=f(x)$, и, во-вторых, кривую, определяемую уравнением $y=f'(x)$. Например, если дана функция x^2-5x, ее производная $2x-5$, то будем рассматривать, во-первых, параболу, определяемую уравнением $y=x^2-5x$, и, во-вторых, прямую, уравнение которой $y=2x-5$.

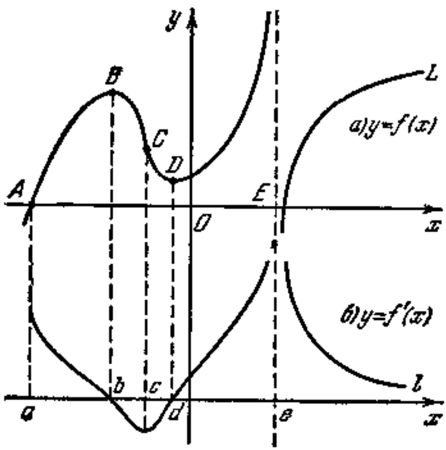

Рис. 67.

Если функция $f(x)$ при $x=x_0$ имеет экстремум, то ее производная при этом значении x_0 или равна нулю, или вовсе не существует; поэтому график функции $y=f'(x)$ при $x=x_0$ или пересекает ось Ox, или терпит разрыв.

Если график функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ имеет точку перегиба, т. е. если в этом месте выпуклость сменяется вогнутостью (или наоборот), и если существует $f''(x_0)$, то график $y=f'(x)$ имеет при $x=x_0$ экстремум, так как $f''(x_0)=0$.

Дальше в этом параграфе все рассуждения и заключения будут основываться на графиках, поэтому они не будут претендовать на абсолютную точность. Иными словами, здесь будут проводиться только *качественные* исследования.

Итак, пусть функция $f(x)$ определена графиком, изображенным на рис. 67, *а*. Под графиком функции $y=f(x)$ будем строить график функции $y=f'(x)$. На обоих чертежах (*а* и *б*) точки, имеющие одинаковые абсциссы, будут расположены на одной прямой, параллельной оси Oy.

На участке AB функция $f(x)$ возрастает, поэтому ее производная положительна, но так как функция на этом участке выпукла, то производная убывает. Следовательно, график функции $y=f'(x)$ на соответствующем участке ab будет определять положительную убывающую кривую. Максимуму функции $f(x)$ (точке B) на рис. 67,*б* будет соответствовать точка пересечения с осью Ox (точка b). На участке BC (рис. 67,*а*) кривая убывает, поэтому соответствующий участок кривой $y=f'(x)$ располагается ниже оси Ox и убывает. Точке перегиба C на рис. 67,*а* соответствует минимум на рис. 67,*б*. Минимуму на рис. 67,*а* (точке D) соответствует точка пересечения с осью Ox (точка d). Разрыву функции $y=f(x)$ соответствует и разрыв производной. В результате получаем график производной, изображенный на рис. 67,*б*. В § 5 (пр. 1) был построен график функции $y=\frac{(x-4)^2(x+2)}{8}$,

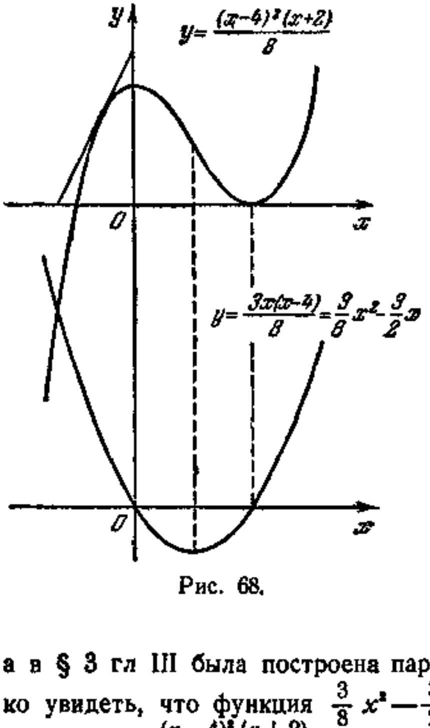

Рис. 68.

а в § 3 гл III была построена парабола $y=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x$; легко увидеть, что функция $\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x$ является производной от функции $\frac{(x-4)^2(x+2)}{8}$. Если соединить графики этих функций, то получим изображенное на рис. 68. Этот чертеж подтверждает сказанное выше.

Упражнения к гл. VIII

1. Найти критические значения и исследовать на убывание и возрастание функцию $y=\frac{x^3}{3}-16x$.

2. Найти критические значения и исследовать на возрастание и убывание функцию $y=\frac{x^4}{4}-\frac{8}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+1$.

3. Найти критические значения функции $y=e^x$.

4. Найти критические значения функции $y=e^{-x^2}$ и исследовать ее на возрастание и убывание.

5. Найти экстремальные значения функции $y=\frac{x^3}{3}-16x$ (см. упр. 1).

6. Найти экстремальные значения функции $y=\frac{x^4}{4}-\frac{8}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+1$ (см. упр. 2).

7. Найти экстремальные значения функции $y=e^{-x^2}$ (см. упр. 4).

8. Найти экстремальные значения функции $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

9. Доказать, что из всех прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

10. Представить число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых, таких, чтобы их произведение было наибольшим.

11. Исследовать на выпуклость и вогнутость следующие функции:

а) $y=-x^2+6x-8$;

б) $y=\operatorname{tg} x$.

12. Построить графики функций, указанных в упражнениях 1, 2, 3, 4, 8, 11.

ГЛАВА IX
ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Бесконечно малые величины[1])

Определение. *Бесконечно малой величиной вблизи $h=a$ называется функция, зависящая от h и имеющая предел, равный нулю при условии, что независимое переменное стремится к a.*

Например, $(h-3)^2$ является бесконечно малой величиной при условии, что h стремится к 3; $\sin h$ и $\operatorname{tg} h$ являются бесконечно малыми при условии, что h стремится к нулю.

Бесконечно малые величины при условии, что независимое переменное стремится к нулю, будем называть «бесконечно малыми», не указывая, а только подразумевая условие $h \longrightarrow 0$. Таким образом, будем говорить, что $\sin h$, $\operatorname{tg} h$, h^2 являются «бесконечно малыми», а не бесконечно малыми при условии $h \longrightarrow 0$.

Приведем примеры геометрического и физического содержания.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами x и h является бесконечно малой при любых x, так как

$$\lim_{h \to 0} S = \lim_{h \to 0} (xh) = 0.$$

Пример 2. Объем v прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 3, 2 и $2h$, является бесконечно малым, так как

$$\lim_{h \to 0} v = \lim_{h \to 0} 3 \cdot 2 \cdot 2h = 0.$$

---

[1]) В этом параграфе чаще всего независимое переменное будем обозначать через h.

Пример 3. Объем v прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны h, $2h$ и $5h$, является бесконечно малым, так как

$$\lim_{h\to 0} v = \lim_{h\to 0} (h\cdot 2h\cdot 5h) = 10 \lim_{h\to 0} h^3 = 0.$$

Пример 4. По закону Ома $v = Ri$, где v — напряжение, R — сопротивление и i — ток. Отсюда следует, что при постоянном сопротивлении напряжение является бесконечно малым относительно тока, так как

$$\lim_{i\to 0} v = \lim_{i\to 0} Ri = 0.$$

Пусть дана бесконечно малая величина $\alpha(h)$, т. е. $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Рассмотрим предел отношения $\frac{\alpha(h)}{h}$ при $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h}.$$

Если этот предел существует и равен нулю, то бесконечно малая величина $\alpha(h)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем h.

Если предел равен конечному числу l $(l \neq 0)$[1]*, то бесконечно малые $\alpha(h)$ и h называются величинами одного порядка; если $l = 1$, то $\alpha(h)$ и h называются эквивалентными бесконечно малыми.*

Пример 5. Пусть $\alpha(h) = h^4$. Это бесконечно малая величина порядка более высокого, чем h, так как

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h} = \lim_{h\to 0} h^3 = 0.$$

Пример 6. Пусть $\alpha(h) = \sin 2h$; $\alpha(h)$ — бесконечно малая того же порядка, что и h, поскольку

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{h} = 2 \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 2.$$

---

[1]) Этот предел может зависеть от других переменных, отличных от h.

Пример 7. $\alpha(h)=\sin h$ — бесконечно малая, эквивалентная h, так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

Пример 8. $\alpha(h)=1-\cos h$. Так как $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}=0$, то $1-\cos h$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем h.

В заключение параграфа рассмотрим функцию $y=f(x)$. Пусть приращение независимого переменного равно h, тогда приращение функции равно $\Delta y=f(x+h)-f(x)$. Так как приращение h независимого переменного x не зависит от величины x, то для вычисления Δy нужно задать величину x и величину h, т. е. приращение функции одного переменного является функцией **двух** независимых переменных x и h.

Пример 9. Пусть дана функция $y=x^2$. Ее приращение равно $\Delta y=(x+h)^2-x^2$. Если $x=3$, а $h=1$, то $\Delta y=$ $=(3+1)^2-3^2=7$. Если же $x=0$ и по-прежнему $h=1$, то $\Delta y=(0+1)^2-0^2=1$. Здесь h сохраняет значение 1, но, поскольку x меняется, изменяется и Δy.

Если $x=2$, а $h=1$, то $\Delta y=(2+1)^2-2^2=5$. Если же $x=2$, а $h=0{,}5$, то $\Delta y=(2+0{,}5)^2=6{,}25-4=2{,}25$. Здесь x сохраняет значение 2, но h меняется, поэтому меняется и Δy.

Если $f(x)$ — функция непрерывная, то, по определению, ее приращение Δy стремится к нулю при условии, что приращение h независимого переменного x стремится к нулю. Поэтому, используя введенное понятие бесконечно малой величины, можно сказать, что приращение непрерывной функции есть величина бесконечно малая относительно приращения независимого переменного.

§ 2. Дифференциал

Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$, имеющая производную. Тогда, по определению производной,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Поэтому, если в правой части откинем знак предела, то получим ошибку, величина которой зависит и от x и от h. Обозначим эту ошибку через $\alpha(x, h)$. Тогда вместо равенства (1) можно написать

$$f'(x)+\alpha(x, h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$

Про ошибку $\alpha(x, h)$ мы знаем, что

$$\lim_{h\to 0}\alpha(x, h)=0. \tag{3}$$

Это следует из равенства (1). Значит, ошибка $\alpha(x, h)$ является бесконечно малой относительно приращения h независимого переменного.

Если умножим обе части равенства (2) на h, то получим

$$f'(x)h+\alpha(x, h)h=f(x+h)-f(x),$$

или

$$\Delta y=f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\alpha(x, h)h. \tag{4}$$

В левой части равенства (4) стоит приращение функции Δy, а в правой части — два члена: $f'(x)h$ и $\alpha(x, h)h$. Оценим порядок малости этих членов:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)h}{h}=f'(x),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(x, h)h}{h}=\lim_{h\to 0}\alpha(x, h)=0.$$

Очевидно, что первый член $f'(x)h$ (если $f'(x)\neq 0$) одного порядка с h, т. е. является линейным относительно h, а второй член $\alpha(x, h)h$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка относительно h.

Из равенства (4) получаем, что приращение функции с точностью до бесконечно малой высшего порядка равно $f'(x)h$; это выражение называется *дифференциалом функции.*

Определение. *Дифференциал есть та часть приращения функции Δy, которая линейна относительно h.* Таким образом, *дифференциал функции равен произведению производной на приращение независимого переменного.*

Дифференциал функции обозначают или dy, или $df(x)$, так что

$$dy=df(x)=f'(x)h. \tag{5}$$

Для симметрии записей вводится определение дифференциала независимого переменного.

Определение. *Дифференциалом независимого переменного называется его приращение.*

Дифференциал независимого переменного обозначается dx, так что имеем

$$dx = h = \Delta x. \tag{6}$$

Операция нахождения дифференциала называется *дифференцированием.*

Пример 1. Найдем дифференциал функции $y = \sin x$. Так как $(\sin x)' = \cos x$, то $dy = d\sin x = \cos x \cdot h = \cos x dx$.

Пример 2. Вычислим значение дифференциала функции $y = x^3$, если $x = 2$ и $dx = h = 0{,}1$.

Так как $(x^3)' = 3x^2$, то $dy = 3x^2\,dx$. Подставляя сюда вместо x его значение 2, а вместо dx его значение 0,1, получим

$$dy_{\substack{x=2\\ h=0,1}} = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 = 1{,}2.$$

Из определения дифференциала функции следует, что дифференциал функции одного переменного является функцией двух переменных.

Из формул (5) и (6) следует, что $f'(x) = \frac{dy}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$. Таким образом, производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

С этого момента для обозначения производной будем пользоваться и знаком $(\ )'$ и отношением дифференциалов.

Таблица дифференциалов

1. $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$.
2. $d\sin x = \cos x\,dx$.
3. $d\cos x = -\sin x\,dx$.
4. $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$.
5. $d[f(x)\,\varphi(x)] = f\,d\varphi + \varphi\,df$.
6. $d(a) = 0$.
7. $d[af(x)] = a\,df(x)$.
8. $d\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi\,df - f\,d\varphi}{\varphi^2}$.
9. $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$.
10. $d[f(\varphi(x))] = f'\,d\varphi$.
11. $de^x = e^x\,dx$.
12. $d\ln x = \frac{1}{x}\,dx$.
13. $d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
14. $d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

§ 3. Применение к приближенным вычислениям

Перепишем формулу (4) § 2 в следующем виде:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\alpha(x,\ h)h, \tag{1}$$

и для начала посмотрим на примере, как будут выглядеть отдельные ее члены при некоторых числовых значениях x и h.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^3$. Положим $x=2$ и $h=0{,}01$. Применяя формулу куба суммы, получаем

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3. \tag{*}$$

С другой стороны, применяя формулу (1) и зная, что $f'(x)=3x^2$, получим

$$(x+h)^3=x^3+3x^2\cdot h+\alpha(x,\ h)h. \tag{**}$$

Сравнивая формулы (*) и (**), видим, что в левых частях стоит одно и то же, в правых же частях совпадают первые два члена, следовательно, третий член в формуле (**) равен двум последним членам в формуле (*), т. е. $\alpha(x,\ h)h=$ $=3xh^2+h^3$. Вычислим все члены, встречающиеся в этом примере, при указанных числовых значениях x и h:

$$f(2)=2^3=8,\quad f(2+0{,}01)=2{,}01^3=8{,}120601,$$
$$f'(2)\cdot 0{,}01=3\cdot 2^2\cdot 0{,}01=0{,}12,$$
$$\alpha(2;\ 0{,}01)\,0{,}01=3\cdot 2\cdot 0{,}0001+0{,}000001=0{,}000601,$$
$$8{,}120601=8+0{,}12+0{,}000601.$$

Если бы мы захотели вычислить $(2{,}01)^3$ не точно, а приближенно с точностью до 0,01, то член $\alpha(x,\ h)h=0{,}000601$ никакого значения бы не имел, т. е. его можно было бы просто откинуть.

Аналогично в общем случае формулу (1) заменяют приближенной формулой, откидывая бесконечно малую высшего порядка, т. е. член $\alpha(x,\ h)h$. Тогда получается приближенная формула

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h \tag{2}$$

(знак $\approx$ обозначает приближенное равенство). Эту формулу имеет смысл употреблять только при малых значениях величины h, так как в противном случае ошибка может оказаться очень большой.

Приведем примеры применения формулы (2).

Пример 2. Выведем приближенную формулу для вычисления кубического корня. Возьмем $f(x)=\sqrt[3]{x}$, тогда $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Применяя формулу (2), получаем

$$\sqrt[3]{x+h}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}h.$$

Если положить $x=z^3$, то полученному результату можно придать следующий вид:

$$\sqrt[3]{z^3+h}\approx z+\frac{h}{3z^2}.$$

Отсюда видно, что если нам известен кубический корень из числа, то для близких чисел можно с удобством воспользоваться выведенной формулой. Например, зная, что $\sqrt[3]{1000}=10$, вычисляем $\sqrt[3]{1003}$. Здесь $z=10$, $h=3$, поэтому получаем

$$\sqrt[3]{1003}\approx 10+\frac{3}{3\cdot 100}\approx 10{,}01.$$

Сделаем проверку, возведя 10,01 в куб. Видим, что вместо 1003 получили число 1003,003001, т. е. ошибка меньше 0,005.

Пример 3. Выведем приближенную формулу для вычисления тангенсов малых углов. Так как $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, то применяя формулу (2), получаем

$$\operatorname{tg}(x+h)\approx\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos^2 x}h.$$

Зная, что $\operatorname{tg} 0=0$ и $\cos 0=1$, и полагая в предыдущей формуле $x=0$, найдем

$$\operatorname{tg} h\approx h.$$

Напоминаем, что здесь h есть радианная мера угла. Например, вычислим $\operatorname{tg} 3^\circ$. Переведем сначала градусную меру угла в радианную: $\operatorname{tg} 3^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{60}$, тогда

$$\operatorname{tg} 3^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{60}\approx\frac{\pi}{60}=0{,}0524.$$

§ 4. Дифференциал площади криволинейной трапеции

Определение. *Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная с трех сторон прямыми, а с четвертой стороны кривой. При этом две прямые параллельны между собой и перпендикулярны третьей, а кривая пересекается с любой прямой, параллельной боковым сторонам, в одной точке.*

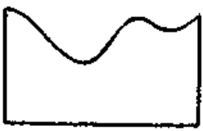

Рис. 69.

Рис. 70.

Рис. 71.

Не исключается случай, когда одна или обе боковые стороны обращаются в точку. На рис. 69, 70, 71 изображены криволинейные трапеции.

Все плоские фигуры, с которыми нам придется встречаться, могут быть представлены как совокупность криволинейных трапеций. Например, на рис. 72 фигура разбита на четыре криволинейные трапеции.

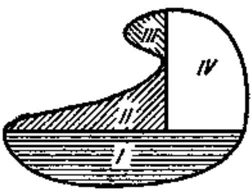

Рис. 72.

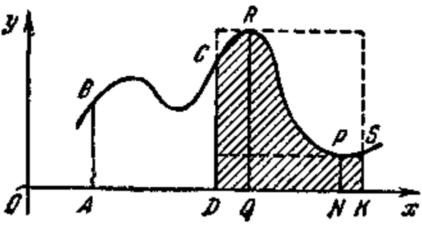

Рис. 73.

Конечная наша цель — определить площадь криволинейной трапеции, но пока эту задачу мы еще не можем решить. Однако мы сумеем найти дифференциал площади криволинейной трапеции. Решим эту задачу, предполагая, что трапеция расположена определенным образом.

Пусть дана криволинейная трапеция $ABCD$, ограниченная осью Ox, двумя прямыми, перпендикулярными этой оси, и кривой, заданной уравнением $y=f(x)$ (рис. 73).

Будем считать, что прямая AB неподвижна в процессе всех рассуждений, т. е. абсцисса точки A есть постоянная величина. Прямую же CD будем двигать, т. е. абсцисса точки D будет переменной. Обозначим ее через x.

Ясно, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ будет изменяться в зависимости от величины x; значит, площадь есть функция x. Обозначим ее $F(x)$. Этой функции мы не знаем, но несмотря на это найдем ее дифференциал.

Дадим x приращение $h=DK$; тогда площадь $F(x)$ получит приращение $\Delta F(x)$ (это приращение на рис. 73 заштриховано).

При изменении независимого переменного от величины x до $x+h$ (от точки D до точки K) функция $f(x)$, т. е. ордината точки, лежащей на кривой, также изменяется и при этом достигает наибольшего значения M и наименьшего значения m. На рис. 73 $QR=M$ и $NP=m$.

Рассмотрим прямоугольник с основанием DK и высотой $QR=M$, его площадь равна $T_1=Mh$. Прямоугольник с тем же основанием $DK=h$ и высотой $NP=m$ имеет площадь, равную $T_2=mh$.

Очевидно, что площадь второго прямоугольника T_2 меньше площади T_1 первого на величину $(M-m)h$. Также очевидно, что площадь второго прямоугольника меньше приращения $\Delta F(x)$, а площадь первого больше этого приращения, так что

$$mh \leqslant \Delta F \leqslant Mh.$$

Следовательно, приращение ΔF отличается и от площади первого, и от площади второго прямоугольника на величину, меньшую чем $(M-m)h$.

Обозначим разность между приращением ΔF и площадью T_2 через ω, тогда

$$\Delta F(x)=mh+\omega. \tag{1}$$

Величина ω меняется вместе с h и всегда меньше $(M-m)h$. Обозначим через ψ разность между площадью T_1 и приращением ΔF, получим: $\Delta F(x)=Mh-\psi$. Остановимся на формуле (1) и проследим, как меняются ее члены при стремлении h к нулю.

Предварительно заметим, что, во-первых, всегда, т. е. при любых значениях x,

$$0<\omega<(M-m)h \tag{2}$$

и, во-вторых, если $h \to 0$, то точка K приближается к точке D. Точка N, абсциссу которой обозначим через x_N, заключена между D и K; поэтому при $h \to 0$ точка N также приближается к точке D, следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} x_N = x$.

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной. В силу свойств непрерывной функции (см. гл. VI, § 6) находим

$$\lim_{h\to 0} m = \lim_{h\to 0} f(x_N) = f[\lim_{h\to 0} x_N] = f(x), \tag{3}$$

а это значит, что можно записать (см. начало § 2 этой главы)

$$m = f(x) + \alpha, \tag{4}$$

где α — бесконечно малая относительно h. Также можно заключить, что

$$M = f(x) + \beta, \tag{5}$$

где β — бесконечно малая относительно h.

Исследуем порядок малости членов, стоящих в правой части равенства (1). Для этого найдем следующие пределы:

$$\lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} \text{ и } \lim_{h\to 0} \frac{\omega}{h}.$$

Первый предел находим непосредственно [применяя (3)]:

$$\lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = f(x). \tag{6}$$

Чтобы найти второй предел, найдем сначала [используя (4) и (5)]

$$\lim_{h\to 0} (M - m) = \lim_{h\to 0} [f(x) + \beta - f(x) - \alpha] =$$
$$= \lim_{h\to 0} (\beta - \alpha) = \lim_{h\to 0} \beta - \lim_{h\to 0} \alpha = 0. \tag{7}$$

Так как ω удовлетворяет неравенству (2), то $0 < \frac{\omega}{h} < M - m$, а в силу равенства (7)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega}{h} = 0.$$

Таким образом, установлено, что и mh и ω являются бесконечно малыми. Кроме того, член ω есть бесконечно малая высшего порядка относительно h.

Учитывая все эти рассуждения и применяя равенство (4), можно переписать равенство (1) в виде

$$\Delta F(x) = mh + \omega = f(x)\,h + \alpha h + \omega. \qquad (8)$$

В правой части равенства (8) стоят три члена. Каждый из них является бесконечно малым относительно h: первый из них линеен относительно h, а два других имеют высший порядок малости.

Применяя результаты § 2, заключаем, что приращение площади криволинейной трапеции равно $f(x)\,h$ плюс величина высшего порядка относительно h, а поэтому дифференциал площади криволинейной трапеции равен $f(x)\,h$, т. е.

$$dF(x) = f(x)\,h = f(x)\,dx.$$

Этим результатом мы воспользуемся в следующих главах.

Пример 1. Найдем дифференциал площади F криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой, заданной уравнением $y = x^3$, прямой $x = 1$ и подвижной прямой, параллельной оси Oy.

Применяя только что полученный результат, будем иметь

$$dF = x^3\,dx.$$

Пример 2. Найти производную от площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой, заданной уравнением $y = \sin x$, прямой $x = 2$ и подвижной прямой, параллельной оси Oy.

Находим дифференциал этой площади: $dF = \sin x\,dx$, а следовательно и производную:

$$F' = \frac{dF}{dx} = \sin x.$$

§ 5. Применение дифференциала к различным задачам

Рассуждения § 2 не только приводят к понятию дифференциала, но в некоторых случаях позволяют найти производную. Предположим, что приращение некоторой функции представлено в виде

$$\Delta y = \varphi(x)\,h + \omega(x, h), \qquad (*)$$

где $\varphi(x)$ не зависит от h, и

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x, h)}{h}=0.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{h}=\varphi(x)+\frac{\omega(x, h)}{h},$$

откуда

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\varphi(x)+\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x, h)}{h}=\varphi(x),$$

т. е. $\varphi(x)$ — производная заданной функции.

Пример 1. Найти производную от функции $f(x)$, определенной геометрически как объем, ограниченный:

1) поверхностью P, полученной от вращения вокруг оси Ox дуги OA, принадлежащей параболе $y=x^2$;

2) плоскостью Π_1, перпендикулярной оси Ox и отстоящей от начала координат на расстояние x (рис. 74).

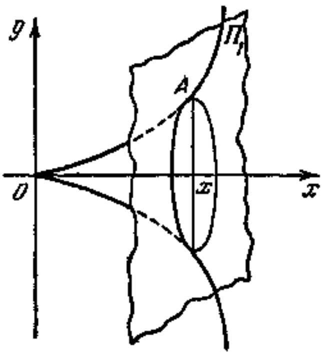

Рис. 74.

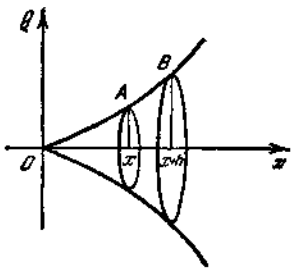

Рис. 75.

Ясно, что объем зависит от величины x, т. е. является функцией x.

Возьмем произвольное число x. Соответствующее значение функции $f(x)$ будет определяться объемом, ограниченным поверхностью P и плоскостью Π_1. Дадим x приращение h. Объем, т. е. функция $f(x)$, в связи с этим получит приращение Δf. Это приращение показано на рис. 75 и отдельно на рис. 76: оно ограничено поверхностью P и плоскостями Π_1 и Π_2. Плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются с поверхностью P по окружностям (так как P — поверхность вращения). Обозначим эти окружности K_1 и K_2.

Рассмотрим два цилиндра: первый из них имеет основанием K_1, образующую, параллельную оси Ox, и высоту h; второй имеет основанием K_2 и образующую, также параллельную оси Ox (рис. 77). Объем первого цилиндра обозначим

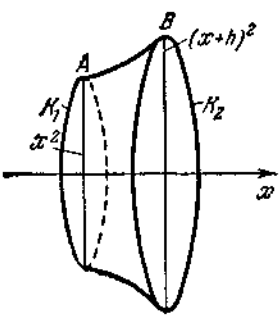

Рис. 76.

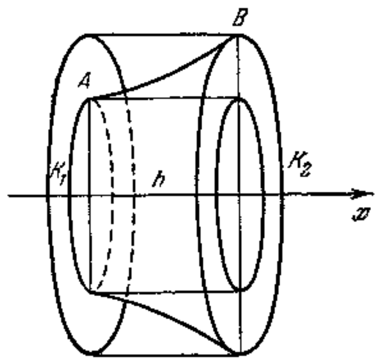

Рис. 77.

через W_1, а второго — через W_2. Из чертежей ясно, что приращение функции Δf больше объема W_1 и меньше объема W_2, т. е. $W_1 < \Delta f(x) < W_2$. Но объемы W_1 и W_2 легко подсчитать:

$$W_1 = \pi x^2 h, \quad W_2 = \pi (x+h)^2 h.$$

Разность объемов W_2 и W_1 (т. е. объем цилиндрического кольца) равна

$$W_2 - W_1 = \pi (x+h)^2 h - \pi x^2 h.$$

Приращение $\Delta f(x)$ отличается от W_1 на некоторую часть разности $W_2 - W_1$, поэтому

$$\Delta f = \pi x^2 h + \theta (W_2 - W_1), \qquad (**)$$

где θ — некоторое положительное число, меньшее единицы. Так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{W_2-W_1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\pi(x+h)^2 h-\pi x^2 h}{h}=\lim_{h\to 0}[\pi(x+h)^2-\pi x^2]=0,$$

то член $\theta(W_2-W_1)$, стоящий в правой части равенства (**), является бесконечно малой высшего порядка малости относительно h. Поэтому равенство (**) является частным случаем равенства (*). Следовательно, вывод, который был сделан в начале параграфа, может быть перенесен и на равенство (**), т. е. производная от функции $f(x)$ равна πx^2.

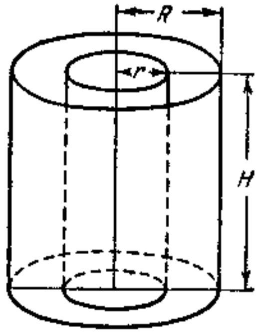

Рис. 78.

В этом примере следует обратить внимание на то, что функция $f(x)$ была определена чисто геометрически, нам не была известна формула, определяющая эту функцию, однако производную мы нашли.

Пример 2. Рассмотрим цилиндрическую трубу, у которой радиус внешней поверхности R, радиус внутренней поверхности r, высота H. Найдем объем V материала, из которого сделана эта труба (рис. 78).

Будем называть этот объем объемом цилиндрического слоя. Поскольку объем внешнего цилиндра равен $\pi R^2 H$, а объем внутреннего равен $\pi r^2 H$, то объем цилиндрического слоя равен

$$V=\pi R^2 H-\pi r^2 H,$$

или

$$V=\pi H(R^2-r^2)=\pi H(R+r)(R-r). \qquad (*)$$

Если стенка трубы тонкая, то r и R мало отличаются друг от друга. Обозначим их разность через h ($h=R-r$). Тогда формула (*) примет вид

$$V=\pi H(2r+h)h,$$

или

$$V=2\pi Hrh+\pi Hh^2. \qquad (**)$$

Второй член, стоящий в правой части равенства (**), второго порядка относительно h. Поэтому при $h \to 0$ член $\pi H h^2$ становится бесконечно малой высшего порядка. Отбрасывая его, мы получим приближенную формулу для подсчета объема тонкого цилиндрического слоя:

$$V \approx 2\pi H r h. \qquad (***)$$

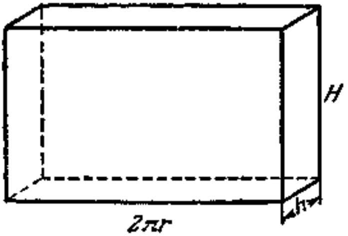

Рис. 79.

Интересно отметить еще один способ получения этой формулы (рис. 79).

Если разрезать трубку вдоль ее образующей и развернуть на плоскость, то получим «почти» прямоугольный параллелепипед с измерениями $2\pi r$, h и H. Его объем равен $2\pi r H h$, т. е. как раз тому, что дает формула (***).

Упражнения к гл. IX

1. Какие из функций $4h^2$, $\operatorname{ctg} h$, $\ln h$, $\sin^2 h$ являются бесконечно малыми?

2. Какие из следующих функций являются бесконечно малыми высшего порядка, того же порядка или эквивалентными относительно функции h^2: h^4, $\sin h^2$, $\sin^4 h$, h^3, $\sin^2 h$, $5\sin^2 h$?

3. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $(x+3)^2$; б) $\sin(x+1)$; в) $\sin x + 1$; г) $\ln x$.

4. Воспользоваться формулой (2) § 3 и найти приближенную формулу для $\sqrt[4]{x+h}$. Вычислить приближенно $\sqrt{16,1}$.

5. Вывести приближенную формулу для $\sin x$ (при малых x).

6. Найти производную функции $f(x)$, если известно, что ее приращение представимо в виде $\Delta f(x) = \operatorname{arctg} x + \omega(x, h)$, где $\lim\limits_{h \to 0} \omega(x, h) = 0$.

ГЛАВА X

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. *Первообразной от заданной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$ такая, что ее дифференциал равен $f(x)\,dx$*, т. е.

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Например, функция x^3 является первообразной от функции $3x^2$, так как $dx^3 = 3x^2\,dx$. Площадь $F(x)$ криволинейной трапеции (в соответствии с § 4 гл. IX) является первообразной от функции $f(x)$, график которой ограничивает эту криволинейную трапецию, так как

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Пример 1. Покажем, что функция $\operatorname{arctg} x$ есть первообразная от функции $\frac{1}{1+x^2}$. В самом деле, производная $\operatorname{arctg} x$ равна $\frac{1}{1+x^2}$, следовательно, дифференциал равен $\frac{1}{1+x^2}\,dx$. Поэтому $\operatorname{arctg} x$ есть первообразная от $\frac{1}{1+x^2}$.

Определение первообразной можно дать в другой, эквивалентной форме: *первообразной от функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, имеющая своей производной $f(x)$*.

Обратим внимание на то, что первообразная от данной функции существует не одна. Например, как было указано, x^3 есть первообразная от $3x^2$, но, взяв функцию $x^3 + C$, где C — любое постоянное число, получим, что $d(x^3 + C) = 3x^2\,dx$, т. е. $x^3 + C$ также является первообразной от $3x^2$. Можно было бы доказать, что и обратное предложение верно, т. е. если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными от функции $f(x)$, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Из сказанного следует, что операция нахождения первообразной, во-первых, является операцией, обратной дифференцированию, и, во-вторых, эта операция неоднозначная, т. е. в результате ее применения можно получить различные функции, отличающиеся на постоянные слагаемые.

Определение. *Совокупность всех первообразных от заданной функции называется неопределенным интегралом от этой функции.*

Неопределенный интеграл обозначается так: $\int f(x)\,dx$, и читается: неопределенный интеграл от функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функций $f(x)$, то любая другая из первообразных от той же функции будет равна

$$F(x)+C,$$

где C — любое число. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{А}$$

Из определения первообразной и неопределенного интеграла следует, что

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx. \tag{Б}$$

В самом деле,

$$d\int f(x)\,dx=d\,[F(x)+C]=dF\,(x)+dC=dF\,(x)=f\,(x)\,dx.$$

Выпишем формулы, справедливость которых проверяется дифференцированием.

Таблица интегралов

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n\neq-1),$

так как $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)=x^n\,dx.$

2. $\int \frac{dx}{x}=\ln x+C,$

так как $d\,(\ln x+C)=\frac{dx}{x}.$

3. $\int e^x\,dx=e^x+C,$

так как $d\,(e^x+C)=e^x\,dx.$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C,$

так как $d(\sin x + C) = \cos x\,dx.$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$

так как $d(-\cos x + C) = \sin x\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

так как $d(\operatorname{tg} x + C) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

так как $d(-\operatorname{ctg} x + C) = \frac{dx}{\sin^2 x}.$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$

так как $d(\operatorname{arctg} x + C) = \frac{dx}{1+x^2}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$

так как $d(\arcsin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$

Проверим формулу 10. Возьмем дифференциал от левой части равенства, получим [в силу формулы (Б)]

$$d \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Таким образом, мы убеждаемся в том, что левая часть есть первообразная от функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Теперь возьмем дифференциал от правой части равенства 10:

$$d \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' dx =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Убеждаемся в том, что правая часть равенства есть первообразная от функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Значит, левая часть может отличаться от правой только на постоянное слагаемое, но это постоянное у нас и написано в правой части формулы 10. Итак, формула 10 верна.

§ 2. Преобразования неопределенных интегралов

Подобно тому, как в алгебре даются правила, позволяющие преобразовывать алгебраические выражения с целью их упрощения, так и для неопределенного интеграла существуют правила, позволяющие производить его преобразования.

I. *Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от каждого члена в отдельности*, т. е.

$$\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int \varphi(x)\,dx. \qquad \text{(I)}$$

II. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла*, т. е.

$$\int Cf(x)\,dx=C\int f(x)\,dx \quad (C \text{— постоянная величина}). \qquad \text{(II)}$$

III. *Формула интегрирования по частям*, а именно:

$$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx=f(x)\,\varphi(x)-\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad \text{(III)}$$

Докажем формулу (III).

Возьмем дифференциал от правой части равенства (III)

$$d\left[f(x)\,\varphi(x)-\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx\right].$$

Применяя формулу 4 из таблицы § 2 гл. IX, получим

$$d\left[f(x)\,\varphi(x)-\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx\right]=$$
$$=d[f(x)\,\varphi(x)]-d\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Член $d[f(x)\varphi(x)]$ преобразуем по формуле 5 той же таблицы:

$$d[f(x)\varphi(x)]=f(x)\,d\varphi(x)+\varphi(x)\,df(x)=$$
$$=f(x)\varphi'(x)\,dx+\varphi(x)f'(x)\,dx,$$

а член $d\int f'(x)\varphi(x)\,dx$ по формуле (Б) § 1 этой главы равен

$$d\int f'(x)\varphi(x)dx=f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Собирая все вместе, будем иметь

$$d\left[f(x)\varphi(x)-\int f'(x)\varphi(x)\,dx\right]=$$
$$=f(x)\varphi'(x)\,dx+\varphi(x)f'(x)\,dx-f'(x)\varphi(x)\,dx=$$
$$=f(x)\varphi'(x)\,dx,$$

т. е. мы получили то, что получается при дифференцировании левой части равенства (III).

Аналогично проверяются формулы (I) и (II).

Пример 1. $\int(x^2-\sin x)\,dx$. Применяя правило интегрирования I и формулы 1 и 5 из таблицы интегралов, получаем

$$\int(x^2-\sin x)\,dx=\int x^2\,dx-\int\sin x\,dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}-(-\cos x)+C=\frac{x^3}{3}+\cos x+C.$$

Пример 2. $\int\frac{\pi}{\cos^2 x}\,dx$. Применяя правило II и формулу 6 из таблицы интегралов, получаем

$$\int\frac{\pi}{\cos^2 x}\,dx=\pi\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\pi\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 3. $\int\ln x\,dx$. В таблице интегралов, приведенных в § 1, такого интеграла нет. Вычислим его, интегрируя по частям; для этого перепишем данный интеграл следующим образом:

$$\int\ln x\,dx=\int\ln x\,1\,dx.$$

Положив $f(x)=\ln x$ и $\varphi'(x)=1$, применим правило интегрирования по частям:

$$\int \ln x\, dx = \ln x\, \varphi(x) - \int (\ln x)'\, \varphi(x)\, dx.$$

Но так как $\varphi(x)=\int \varphi'(x)\, dx = \int 1\cdot dx = \int x^0\, dx$, то, применяя формулу 1 таблицы интегралов ($n=0$), получим $\varphi = x$. Окончательно получаем

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x\, dx = \\ = x\ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 4. Рассмотрим $\int x \sin x\, dx$. Положим $f(x)=x$ и $\varphi'(x)=\sin x$. Тогда $\varphi(x) = -\cos x$, так как $(-\cos x)' = = \sin x$. Применяя интегрирование по частям, будем иметь

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x - \int (x)' (-\cos x)\, dx = \\ = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Пример 5. Рассмотрим $\int x^2 e^x\, dx$. Положим $f(x)=x^2$ и $\varphi'(x)=e^x$. Тогда $\varphi(x)=e^x$, так как $(e^x)'=e^x$. Применяя интегрирование по частям, будем иметь

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int (x^2)'\, e^x\, dx = \\ = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx. \qquad (*)$$

Таким образом, заданный интеграл выражен при помощи более простого интеграла $\int x e^x\, dx$. Применим к последнему интегралу еще раз формулу интегрирования по частям, для этого положим $f(x)=x$ и $\varphi'(x)=e^x$. Отсюда

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int (x)'\, e^x\, dx = \\ = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C. \qquad (**)$$

Соединяя равенства (*) и (**), получим окончательно

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - e^x + C\right] = \\ = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C = \\ = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1,$$

где $C_1 = -2C$, так что C_1 есть произвольное постоянное интегрирования.

§ 3. Замена переменного интегрирования (метод подстановки)

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые преобразования интеграла к другому виду, который может оказаться более удобным.

Если дан интеграл $\int f(z)\,dz$, где z — функция x: $z = \varphi(x)$, то верна следующая формула:

$$\int f(z)\,dz = \int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx, \tag{IV}$$

которая называется *формулой замены переменного интегрирования*. Проверим ее при помощи дифференцирования. Применяя формулу (Б) из § 1, будем иметь

$$d\int f(z)\,dz = f(z)\,dz. \tag{*}$$

Поскольку $z = \varphi(x)$, то по определению дифференциала

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (*), получим

$$d\int f(z)\,dz = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx.$$

Если же найдем дифференциал правой части равенства (IV), то получим то же выражение. Следовательно, обе части равенства (IV) могут отличаться только на постоянное слагаемое, а это и значит, что формула (IV) верна.

Пример 1. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$. Положим $z=\sin x$, тогда $dz=\cos x\,dx$. Подставим в данный интеграл $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int z^3\,dz$. Применяя формулу 1 из таблицы интегралов, будем иметь

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Пример 2. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$. Положим $a^2-x^2=z^2$ (*). Тогда $x^2=a^2-z^2$, $2x\,dx=-2z\,dz$ или $x\,dx=-z\,dz$. Поэтому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx = \int z(-z\,dz) = -\int z^2\,dz = -\frac{z^3}{3} + C.$$

Чтобы возвратиться к старому переменному x, найдем z из равенства (*): $z=\sqrt{a^2-x^2}$. Окончательно получим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Пример 3. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Прежде чем преобразовывать данный интеграл, рассмотрим интеграл

$$\int \cos^2 t\,dt.$$

Применим формулу косинуса половинного угла $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ и положим в ней $\alpha=2t$. Тогда $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ и $\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$, а интеграл

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt.$$

Нетрудно сообразить, что $\int \cos 2t\,dt = \frac{\sin 2t}{2}$; это легко проверить дифференцированием. Поэтому

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\sin 2t + C. \tag{*}$$

Вернемся к интегралу $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Положим $x=a\sin t$ (**), тогда $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$ и $dx=a\cos t\,dt$. Применяя (*), получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C\right]=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\sin t\cos t+2C\right].$$

Возвратимся теперь к переменному x; из равенства (**) $t=\arcsin\frac{x}{a}$, поэтому $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\right.$ $\left.+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]+C_1$, где C_1— произвольное постоянное.

Пример 4. $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$. Положим $z=\varphi(x)$; тогда $dz=\varphi'(x)\,dx$. Поэтому $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{dz}{z}=\ln z+C$ (по формуле 2 таблицы интегралов). Таким образом,

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln\varphi(x)+C.$$

Пример 5. $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$. Сделаем некоторые преобразования:

$$\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

Теперь положим $z=\frac{bx}{a}$; тогда $dz=\frac{b}{a}dx$, $dx=\frac{a}{b}dz$ и

$$\int\frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}=\int\frac{a\,dz}{b(1+z^2)}=\frac{a}{b}\int\frac{dz}{1+z^2}.$$

По формуле 8 из таблицы интегралов (§ 1) находим

$$\frac{a}{b}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{a}{b}\operatorname{arctg} z+C=\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C,$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C.$$

В нашем курсе мы ограничимся этими примерами, но заметим, что число примеров можно было бы увеличивать неограниченно и, более того, можно было бы указывать типы интегралов, которые берутся, т. е. вычисляются, определенными методами. Это и делается в более полных курсах.

Упражнения к гл. X

Найти следующие интегралы:

1. $\int (x^4+x+1)\,dx.$
2. $\int (e^x+\cos x)\,dx.$
3. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$
4. $\int 5e^x\,dx.$
5. $\int \frac{6}{\sin^2 x}\,dx.$
6. $\int x\cos x\,dx.$
7. $\int x\ln x\,dx.$
8. $\int \sin x\cos x\,dx.$
9. $\int e^{4x}\,dx.$
10. $\int \sin 3x\,dx.$
11. $\int \frac{dx}{4+x^2}.$
12. $\int \frac{dx}{1+4x^2}.$
13. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$
14. $\int \frac{dx}{5+x}.$
15. $\int \frac{dx}{5+2x}.$
16. $\int \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx.$
17. $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx.$
18. $\int \frac{1}{36-x^2}\,dx.$

ГЛАВА XI

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Приближенное вычисление площадей криволинейных трапеций

В § 4 гл. IX было дано определение криволинейной трапеции. В этом параграфе мы займемся определением ее площади, хотя бы приближенно.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 80).

Разобьем отрезок (a, b) на n частей точками x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_{n-1} (на рисунке $n=6$) и из этих точек восставим ординаты $y_k=f(x_k)$. Построенные ординаты разобьют трапецию на n полос (на рисунке 6 полос). В каждой полосе из конца меньшей ординаты (на рис. 80 левой) проведем прямую, параллельную оси Ox.

Таким образом, мы получим n прямоугольников (на рис. 80 шесть прямоугольников); подсчитаем площадь каждого из них и результаты сведем в таблицу:

№ прямоугольника	Основание	Высота	Площадь
1	x_1-a	$f(a)$	$f(a)(x_1-a)$
2	x_2-x_1	$f(x_1)$	$f(x_1)(x_2-x_1)$
3	x_3-x_2	$f(x_2)$	$f(x_2)(x_3-x_2)$
4	x_4-x_3	$f(x_3)$	$f(x_3)(x_4-x_3)$
5	x_5-x_4	$f(x_4)$	$f(x_4)(x_5-x_4)$
6	$b-x_5$	$f(x_5)$	$f(x_5)(b-x_5)$

Сумму площадей этих прямоугольников обозначим s_n (для рис. 80 эта сумма s_6), тогда получим применительно к рис. 80

$$s_6=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\\ +f(x_3)(x_4-x_3)+f(x_4)(x_5-x_4)+f(x_5)(b-x_5),$$

а в общем случае

$$s_n=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots\\ \ldots+f(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}). \quad (1)$$

Если же в каждой полосе из конца большей ординаты (на рис. 80 правой) проведем прямую, параллельную оси

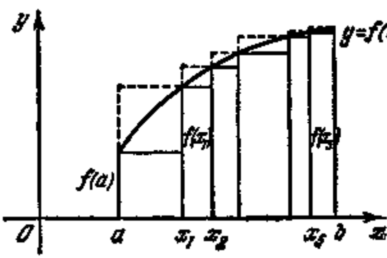

Рис. 80.

Ox, то получим новые прямоугольники, выходящие за пределы криволинейной трапеции. Подсчитаем площадь каждого из них и результаты сведем снова в таблицу:

№ прямоугольника	Основание	Высота	Площадь
1	x_1-a	$f(x_1)$	$f(x_1)(x_1-a)$
2	x_2-x_1	$f(x_2)$	$f(x_2)(x_2-x_1)$
3	x_3-x_2	$f(x_3)$	$f(x_3)(x_3-x_2)$
4	x_4-x_3	$f(x_4)$	$f(x_4)(x_4-x_3)$
5	x_5-x_4	$f(x_5)$	$f(x_5)(x_5-x_4)$
6	$b-x_5$	$f(b)$	$f(b)(b-x_5)$

Обозначив сумму площадей этих прямоугольников через S_n, получим в применении к рис. 80

$$S_6=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\\ +f(x_3)(x_3-x_2)+f(x_4)(x_4-x_3)+\\ +f(x_5)(x_5-x_4)+f(b)(b-x_5),$$

а в общем случае

$$S_n=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots\\ \ldots+f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1}). \quad (2)$$

Если обозначить площадь криволинейной трапеции буквой S, то будем иметь очевидное неравенство

$$s_n<S<S_n. \quad (3)$$

Поэтому, если примем приближенно S_n за S, то получим приближенное значение площади S с избытком, а если за S примем s_n, то — с недостатком. Это записывается так:

$$S_n\approx S, \quad (4)$$
$$s_n\approx S. \quad (5)$$

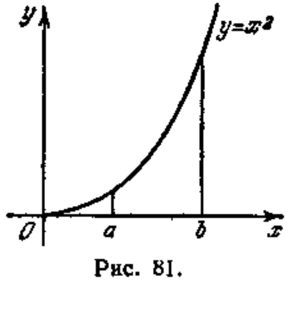

Рис. 81.

Каждое из приближенных значений s_n, S_n площади S отличается от нее не больше чем на S_n-s_n.

Пример 1. Найдем приближенное значение площади криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 81).

Возьмем приближенное равенство (5). Вычисляя s_n по формуле (1), получим

$$s_n=a^2(x_1-a)+x_1^2(x_2-x_1)+\ldots\\ \ldots+x_k^2(x_{k+1}-x_k)+\ldots+x_{n-1}^2(b-x_{n-1}). \quad (6)$$

Для удобства вычислений разобьем отрезок (a,b) на равные части, тогда

$$x_1-a=x_2-x_1=\ldots=x_{k+1}-x_k=\ldots=b-x_{n-1}.$$

Обозначим длину каждой из этих частей через h, тогда

$$h=\frac{b-a}{n}. \quad (7)$$

При этом получим

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad x_3 = a + 3h, \ \ldots \\ \ldots, \ x_k = a + kh, \ \ldots, \ b = a + nh.$$

Формулу (6) можно записать в следующем виде:

$$s_n = a^2h + (a+h)^2 h + \ldots + (a+kh)^2 h + \ldots \\ \ldots + [a + (n-1)h]^2 h$$

или, вынося за скобки h,

$$s_n = h\{a^2 + (a+h)^2 + \ldots + (a+kh)^2 + \ldots \\ \ldots + [a + (n-1)h]^2\}.$$

Раскрывая малые скобки, получим

$$s_n = h\{a^2 + a^2 + 2ah + h^2 + \ldots + a^2 + 2akh + k^2h^2 + \ldots \\ \ldots + a^2 + 2a(n-1)h + (n-1)^2 h^2\}.$$

Произведя внутри фигурных скобок приведение подобных членов и вынося за скобки $2ah$ и h^2, будем иметь

$$s_n = h\{na^2 + 2ah[1 + 2 + \ldots + k + \ldots + (n-1)] + \\ + h^2[1 + 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2]\}. \quad (8)$$

Придадим полученному выражению более простой вид. Для этого отметим, что

$$1 + 2 + \ldots + k + \ldots + (n-1) = \\ = \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (9)$$

(как сумма членов арифметической прогрессии) и

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad (10)$$

(вывод этого тождества помещен в конце книги, в приложении). Подставляя (9) и (10) в равенство (8), получим

$$s_n = h\left\{na^2 + 2ah\frac{n(n-1)}{2} + h^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}.$$

Подставим сюда выражение h из (7):

$$s_n = \frac{b-a}{n}\left\{na^2 + \frac{b-a}{n}n(n-1)a + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}.$$

Вносим $\frac{1}{n}$ в фигурные скобки и делаем сокращение:

$$s_n = (b-a)\left\{a^2 + (b-a)\frac{n-1}{n}a + (b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right\},$$

или

$$s_n = (b-a)\left\{a^2 + (b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right)a + (b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6n}\right)\right\}. \quad (11)$$

Если бы мы воспользовались формулой (4) для приближенного вычисления площади S и формулой (2) для вычисления S_n, то при помощи совершенно аналогичных вычислений получили бы

$$S_n = (b-a)\left\{a^2 + (b-a)a\left(1+\frac{1}{n}\right) + (b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)\right\}. \quad (12)$$

Искомая площадь S криволинейной трапеции лежит между s_n и S_n, т. е. $s_n < S < S_n$.

Будем увеличивать n, т. е., как принято говорить, будем измельчать разбиение отрезка (a, b). При этом h будет стремиться к нулю, число n отрезков разбиения будет неограниченно увеличиваться, т. е. $n \to \infty$, а дроби $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{6n}$ будут стремиться к нулю. Рассматривая правую часть равенства (11), легко заметить, что при n, неограниченно растущем, ее предел равен

$$(b-a)\left\{a^2 + (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{3}\right\} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Предел правой части равенства (12) также равняется $\frac{b^3-a^3}{3}$. При помощи этих длинных вычислений мы убедились, что и s_n и S_n при измельчении разбиения отрезка (a, b), т. е. при $n \to \infty$, стремятся к одному и тому же пределу, а так как S заключено между ними, то и

$$S = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

§ 2. Определенный интеграл

Отвлекаясь от геометрического смысла предыдущего параграфа, можно изложить его содержание следующим образом.

На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ задана функция $y=f(x)$. Разбиваем этот отрезок на части точками

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_k<\ldots<x_{n-1}<b$$

и составляем суммы s_n и S_n, из которых первая s_n строится при помощи наименьших ординат, взятых на каждом из мелких отрезков, а S_n — при помощи наибольших ординат. Сумму s_n будем называть нижней суммой, а сумму S_n — верхней суммой. Составим еще одну сумму:

$$f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(c_k)(x_k-x_{k-1})+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1}),$$

где c_k — любое число, взятое на отрезке $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$, т. е. $x_{k-1} \leqslant c_k \leqslant x_k$; такую сумму будем называть *интегральной суммой*. Таким образом, и нижняя и верхняя суммы являются частными случаями интегральных сумм.

Когда мы будем говорить об «измельчении разбиения», то будем подразумевать под этим следующее: отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ разбиваем точками x_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ на более мелкие отрезки, при этом длину наибольшего из них будем стремить к нулю. Тогда каждый из полученных отрезков по длине будет стремиться к нулю, а число отрезков будет возрастать.

Определение. *Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ называется предел интегральных сумм при условии измельчения разбиения.* Записывается определенный интеграл так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\,[f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+f(c_k)(x_k-x_{k-1})+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1})],$$

где $x_{k-1} \leqslant c_k \leqslant x_k$. Условие «при измельчении разбиения» будем всегда подразумевать, не отражая его в записи.

Число a называется нижним пределом интегрирования, число b — верхним пределом интегрирования, функция $f(x)$ — подынтегральной функцией. Запись $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ читается так: определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b.

Можно было бы доказать, что для непрерывной функции, заданной на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, пределы верхней, нижней и любой интегральной суммы существуют и равны между собой.

Применяя данное определение к примеру предыдущего параграфа, можем сказать, что площадь криволинейной трапеции, рассмотренной там, равна $\int\limits_a^b x^2\,dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

И вообще, площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривой $y = f(x)$, равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

§ 3. Вычисление определенного интеграла при помощи первообразной функции

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, кривой $y = f(x)$, прямыми aA и xB, параллельными оси Oy (рис. 82). Если мы будем изменять x, т. е. двигать правую сторону xB данной трапеции, то площадь будет изменяться. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая площадь зависит от положения стороны xB, а это положение определяется числом x, следовательно, площадь есть функция x.

Обозначим указанную площадь через $F(x)$, тогда пл. $aABx = F(x)$.

В § 2 было показано, что площадь выражается определенным интегралом, поэтому

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x).$$

А из § 4 гл. IX нам известно, что дифференциал площади криволинейной трапеции равен $f(x)\,dx$. Следовательно,

$$dF(x) = d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Значит, площадь криволинейной трапеции является одной из первообразных от функции $f(x)$, ограничивающей эту трапецию.

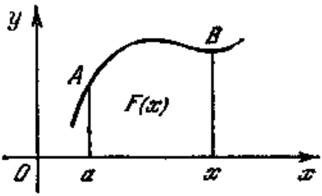

Рис. 82.

Обозначим через $\Phi(x)$ любую первообразную от функции $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \Phi(x) + C \ (*).$$

Если сделать верхний предел интегрирования равным a (рис. 82), т. е. правую сторону совместить с левой, то площадь станет равной нулю. Это значит, что $F(a) = \Phi(a) + C = 0$. Находим отсюда, что $C = -\Phi(a)$. Подставляя полученное значение C в равенство (*), будем иметь

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a),$$

или

$$\int_a^x f(x)\,dx = \Phi(x) - \Phi(a).$$

В частности,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Таким образом, получается правило вычисления определенного интеграла.

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)$, *нужно:*

1) *найти одну из первообразных* $\Phi(x)$ *от подынтегральной функции* $f(x)$;

2) *вычислить значение функции* $\Phi(x)$ *при* $x=b$, *т. е.* $\Phi(b)$;

3) *вычислить значение функции* $\Phi(x)$ *при* $x=a$, *т. е.* $\Phi(a)$;

4) *из первого результата вычесть второй:* $\Phi(b)-\Phi(a)$

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_a^b x^2\,dx$. Так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$, то $\int\limits_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$. Результат совпадает с полученным в § 1 этой главы.

Пример 2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. Так как $(-\cos x)'=\sin x$, то $\Phi(x)=-\cos x$. Следовательно, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

$$\Phi(0)=-\cos 0=-1. \text{ Поэтому } \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=0-(-1)=1.$$

При вычислении определенного интеграла используют знак подстановки $[\ ]_a^b$, именно, если $\Phi(x)$ есть первообразная от функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=[\Phi(x)]_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

§ 4. Свойства определенного интеграла

Как только что было показано в § 3, определенный интеграл вычисляется при помощи неопределенного (т. е. при помощи первообразной функции), поэтому свойства неопределенного интеграла, указанные в гл. X, §§ 2 и 3, переносятся и на определенный интеграл.

Имеем:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{I}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{II}$$

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x)dx, \tag{III}$$

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx, \tag{IV}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{V}$$

Формулы (I)—(III) применяются без особых затруднений, замена же переменного (IV) требует некоторых объяснений, которые будут даны на примерах.

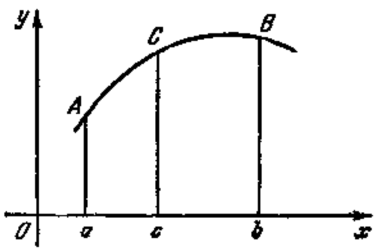

Рис. 83.

Формула (V) выражает свойство определенного интеграла, ясное из его геометрического смысла. В самом деле, интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 83), а интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)\,dx$ выражают площади $aACc$ и $cCBb$, отсюда и видна справедливость формулы (V). Эта формула называется формулой разбиения отрезка интегрирования.

Приведем примеры.

Пример 1. $\int_0^\pi 3x\sin x\,dx$. Обозначим для краткости этот интеграл через I. Применяя (II) и используя результат, полученный в пр. 4 из § 2 гл. X, получим

$$I=3\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx=3\left[-x\cos x+\sin x+C\right]_0^\pi=$$
$$=3\left[-\pi\cos\pi+\sin\pi+C\right]-3\left[0\cos 0+\sin 0+C\right]=3\pi.$$

Пример 2. $I=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Делаем ту же замену переменного, что и в пр. 3 из § 3 гл. X, и используя полученный там результат, получаем

$$I=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]_0^a=$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a}{a}=\frac{a^2}{2}\arcsin 1=\frac{a^2\pi}{4}.$$

Здесь мы переходили от переменного x к переменному t (при вычислении первообразной) и затем делали обратный переход от t к x. При вычислении мы этого перехода не делаем, так как этот пример был разобран ранее (гл. X, § 3, пр. 3).

Можно сделать вычисления иначе, именно сделав подстановку $x=a\sin t$ (*). Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x=0$, то в силу (*) $0=a\sin t$, т. е. $\sin t=0$, откуда $t=0$. Если $x=a$, то в силу (*) имеем $a=a\sin t$, $\sin t=1$, откуда $t=\frac{\pi}{2}$. Итак, при изменении x от 0 до a переменное t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Принимая во внимание все сказанное, можем написать

$$I=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$
$$=a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

При таком вычислении нами был осуществлен переход от x к t, а обратного перехода от t к x нам делать не пришлось. В этом и есть преимущество такого порядка вычислений.

В формуле (IV) числа α и β — значения переменного x, соответствующие значениям a и b переменного z.

Пример 3. Вычислим интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$. Сделаем замену переменного, положив $t=\sin x$ (*). Отсюда получаем: при $x=0$ $t=0$, а при $x=\frac{\pi}{2}$ $t=1$. Дифференцируя(*), имеем $dt=\cos x\,dx$ и, следовательно,

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=[\operatorname{arctg} t]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Упражнение к гл. XI

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int\limits_1^2 x\,dx.$
2. $\int\limits_{-1}^1 x\,dx.$
3. $\int\limits_{-1}^1 x^2\,dx.$
4. $\int\limits_0^1 e^x\,dx.$
5. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^2}.$
6. $\int\limits_1^x \frac{dx}{x}.$
7. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$
8. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

ГЛАВА XII

ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. Общие замечания

Начнем эту главу с напоминания понятий дифференциала, приращения и бесконечно малых. Для этого рассмотрим пример.

Пример 1. Конус имеет ось, расположенную по оси x. Его высота x, угол при вершине 2α, радиус основания $r = x\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 84, a).

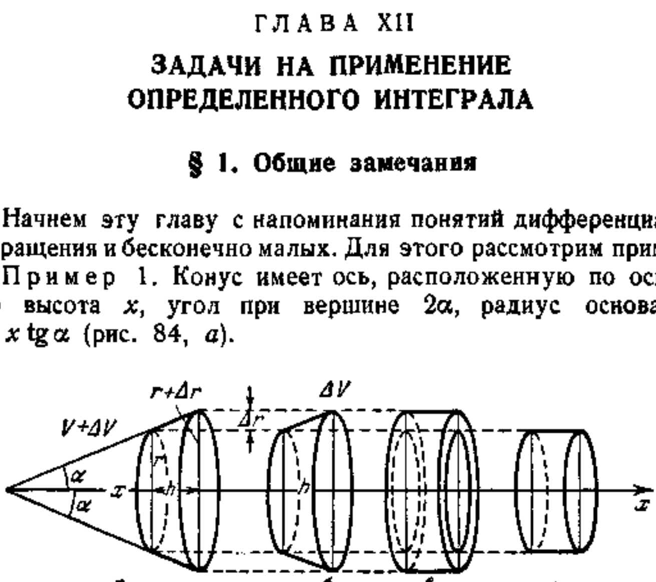

Рис. 84.

Очевидно, что объем конуса есть функция независимого переменного x. Если дадим x приращение h, то объем V получит приращение ΔV, изображенное на рис. 84, a и отдельно на рис. 84, $б$. Построим цилиндр, имеющий высоту h и радиус основания r. Этот цилиндр изображен на рис. 84, $в$ и отдельно на рис. 84, $г$.

Построим еще один цилиндр, имеющий высоту h, но с радиусом основания, равным $r + \Delta r$. Этот цилиндр указан на рис. 84, $в$. Объем первого цилиндра назовем V_1, а второго V_2. Из чертежей ясно, что V_1 меньше ΔV, а ΔV меньше

V_1. Таким образом, объем приращения ΔV отличается от объема V_1 меньше чем на объем цилиндрической трубки (рис. 84, *в*). Объем цилиндрической трубки $V_{\text{тр}}$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равен (см. пр. 2 из § 5 гл. IX)

$$V_{\text{тр}} \approx 2\pi Hrh.$$

Применительно к обозначениям рассматриваемого примера, в котором $H=h$, $r=r$, $h=\Delta r$, $V_{\text{тр}} \approx 2\pi hr\Delta r$. Но $\Delta r = h\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 84, *а*), значит, $V_{\text{тр}} \approx 2\pi rh^2 \operatorname{tg}\alpha$, т. е. объем цилиндрической трубки есть бесконечно малая величина высшего порядка относительно h. Значит, объем цилиндра V_1 отличается от приращения ΔV на величину высшего порядка малости относительно h. Таким образом, мы показали, что V_1 есть дифференциал объема конуса: $dV = V_1 = \pi r^2 h$.

Рассуждениями, аналогичными проведенным, мы будем постоянно пользоваться в этой главе.

§ 2. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, кривой $y=f(x)$ и двумя прямыми: $x=a$ и $x=b$ (рис. 85).

Возьмем произвольное значение x (только не a и не b). Дадим ему приращение $h=dx$ и рассмотрим полоску, ограниченную прямыми AB и CD, осью Ox и дугой BD, принадлежащей рассматриваемой кривой. Эту полоску будем называть элементарной полоской. Площадь элементарной полоски отличается от площади прямоугольника $ACQB$ на криволинейный треугольник BQD, а площадь последнего меньше площади прямоугольника $BQDM$ со сторонами $BQ = h = dx$, $QD = \Delta y$ и площадью, равной $h\,\Delta y = \Delta y\,dx$. С уменьшением стороны h сторона Δy также уменьшается и одновременно с h стремится к нулю. Поэтому площадь $BQDM$ является бесконечно малой вто-

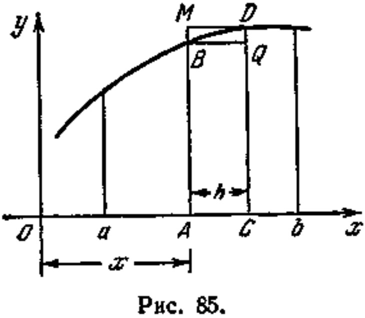

Рис. 85.

рого порядка. Площадь элементарной полоски есть приращение площади, а площадь прямоугольника $ACQB$, равная $AB \cdot AC = f(x)\,dx$, есть дифференциал площади. Следовательно, саму площадь найдем, интегрируя ее дифференциал. В пределах рассматриваемой фигуры независимое переменное x меняется от a до b, поэтому искомая площадь S будет равна

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{I}$$

Пример 1. Вычислим площадь, ограниченную параболой $y = 1 - x^2$, прямыми $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ и осью Ox (рис. 86).

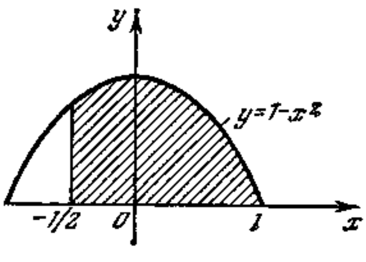

Рис. 86.

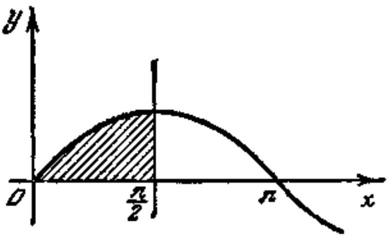

Рис. 87.

Здесь $f(x) = 1 - x^2$, пределы интегрирования $a = -\frac{1}{2}$ и $b = 1$, поэтому

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] = \frac{2}{3} + \frac{11}{24} = \frac{27}{24}.$$

Пример 2. Вычислим площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$, осью Ox и прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 87).

Применяя формулу (I), получаем

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1,$$

Пример 3. Вычислим площадь, ограниченную дугой синусоиды $y=\sin x$, заключенной между двумя соседними точками пересечения с осью Ox (например, между началом координат и точкой с абсциссой π). Заметим, что из геометрических соображений ясно, что эта площадь будет в два раза больше площади предыдущего примера. Однако проделаем вычисления:

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=[-\cos x]_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2.$$

Действительно, наше предположение оказалось справедливым.

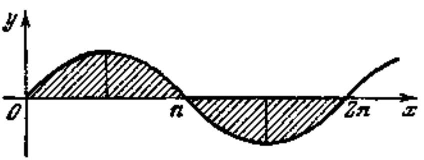

Рис. 88

Пример 4. Вычислить площадь, ограниченную синусоидой и осью Ox на одном периоде (рис. 88).

Предварительные рассуждения позволяют предположить, что площадь получится в четыре раза больше, чем в пр. 2. Однако, произведя вычисления, получим

$$S=\int_0^{2\pi} \sin x\,dx=[-\cos x]_0^{2\pi}=$$

$$=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=-1+1=0.$$

Этот результат требует разъяснений.

Для выяснения сути дела вычисляем еще площадь, ограниченную той же синусоидой $y=\sin x$ и осью Ox в пределах от π до 2π. Применяя формулу (I), получаем

$$S=\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx=[-\cos x]_\pi^{2\pi}=-\cos 2\pi+\cos\pi=-1-1=-2.$$

Таким образом, видим, что эта площадь получилась отрицательной. Сравнивая ее с площадью, вычисленной в пр. 3, получаем, что их абсолютные величины одинаковы, а знаки разные. Если применить свойство V (см. гл. XI, § 4), то получим

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx=2+(-2)=0.$$

То, что получилось в этом примере, не является случайностью. Всегда площадь, расположенная ниже оси Ox, при условии, что независимое переменное изменяется слева направо, получается при вычислении с помощью интегралов отрицательной.

В этом курсе мы всегда будем рассматривать площади без знаков. Поэтому ответ в только что разобранном примере будет таким: искомая площадь равна $2+|-2|=4$.

Пример 5. Вычислим площадь OAB, указанную на рис. 89. Эта площадь ограничена осью Ox, параболой $y=\frac{3}{4}x^2$ и прямой $y=-x+1$.

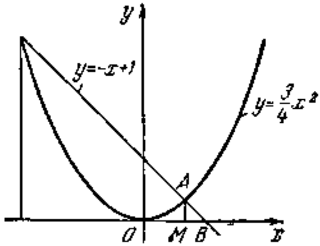

Рис. 89.

Искомая площадь OAB состоит из двух частей: OAM и MAB. Так как точка A является точкой пересечения параболы и прямой, то ее координаты найдем, решая систему уравнений

$$y=\frac{3}{4}x^2, \quad y=1-x$$

(нам нужно найти только абсциссу точки A). Решая систему, находим $x=\frac{2}{3}$. Поэтому площадь приходится вычислять по частям, сначала пл. OAM, а затем пл. MAB:

$$\text{пл. } OAM=\int_0^{2/3}\frac{3}{4}x^2\,dx=\frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2/3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{27},$$

$$\text{пл. } MAB=\int_{2/3}^{1}(1-x)\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{2/3}^{1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{18}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$\text{пл. } OAB=\text{пл. } OAM+\text{пл. } MAB=\frac{2}{27}+\frac{1}{18}=\frac{7}{54}.$$

Пример 6. Вычислим площадь, ограниченную параболой $y=x^2-2x$ и прямой $y=2x-3$ (рис. 90).

Искомая площадь $ABCD$. Она частично расположена над осью Ox, частично — под ней. Поэтому вычисления нельзя провести сразу. Рассмотрим вместо площади $ABCD$ две площади: ABD и DBC. Каждая из них не является криволинейной трапецией (см. гл. IX, § 4), а при помощи определенного интеграла можно вычислять площади только криволинейных трапеций. Следовательно, надо поступить иначе. Представим площадь $ABCD$ так:

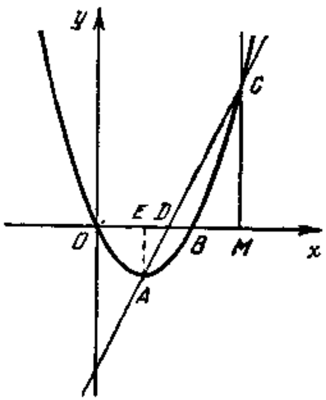

Рис. 90.

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABE - \text{пл. } ADE + \text{пл. } DMC - \text{пл. } BMC.$$

Теперь все четыре части являются криволинейными трапециями (две из них, ADE и DMC, просто треугольники). Вычислим площадь каждой из них, для этого нам потребуются точки $E\ (1, 0)$, $D\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $B(2, 0)$, $M(3, 0)$. Получим:

$$\text{пл. } ABE = \frac{2}{3}, \text{ так как } \int_1^2 (x^2-2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = -\frac{2}{3},$$

$$\text{пл. } ADE = \frac{1}{2} ED \cdot EA = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)1 = \frac{1}{4},$$

$$\text{пл. } DMC = \frac{1}{2} DM \cdot MC = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4},$$

$$\text{пл. } BMC = \int_2^3 (x^2-2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3}.$$

Поэтому пл. $ABCD = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

§ 3. Объем тела вращения

Рассмотрим поверхность P, образованную вращением дуги AB кривой $y=f(x)$ (рис. 91).

Пусть объем V ограничен поверхностью P и двумя плоскостями, каждая из которых перпендикулярна оси Ox. Одна из них отстоит от начала координат на расстояние a, вторая — на расстояние b. Таким образом, внутри объема V абсцисса меняется от a до b. Проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox и отстоящую от начала координат на расстояние x $(a<x<b)$. Объем, отсекаемый этой плоскостью от тела V, является функцией x. Обозначим его $V(x)$. Дадим x приращение $h=dx$, тогда $V(x)$ получит приращение ΔV, указанное на рис. 91 (рекомендуется одновременно рассматривать и рис. 84, а также пр. 1 из § 5 гл. IX).

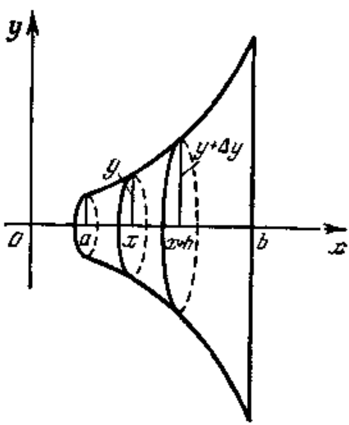

Рис. 91.

Это приращение заключено между двумя цилиндрами: первый из них имеет высоту $h=dx$ и радиус основания $y=f(x)$, а второй — ту же высоту и радиус $y+\Delta y$. Объем первого $\pi y^2\,dx$, второго $\pi(y+\Delta y)^2\,dx$. Поэтому объем цилиндрической трубки, заключенной между этими цилиндрами, равен $2\pi hy\,\Delta y$ (см. пр. 1 из § 5 гл. IX). Следовательно, приращение ΔV отличается от объема меньшего цилиндра не больше чем на $2\pi hy\,\Delta y$. Но это есть бесконечно малая высшего порядка относительно $h=dx$, так как $\Delta y \to 0$ одновременно с h, поэтому дифференциал объема равен объему меньшего цилиндра $\pi y^2\,dx$. Интегрируя, получим искомый объем

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{II}$$

Пример 1. Вычислим объем, полученный вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$, осью Ox и прямой $x=1$ (рис. 92).

Применяя формулу (II), в которой положим $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$, будем иметь

$$V=\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx=\pi\int_0^1 x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}.$$

Пример 2. Вычислим объем, полученный вращением вокруг оси Ox фигуры OAB, ограниченной линиями $y=\frac{3}{4}x^2$ и $y=1-x$ (см. пр. 5 из § 2 и рис. 89).

В этом случае искомый объем следует разбить на две части.

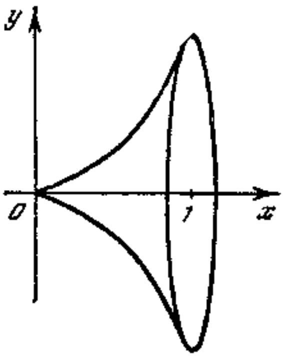

Рис. 92

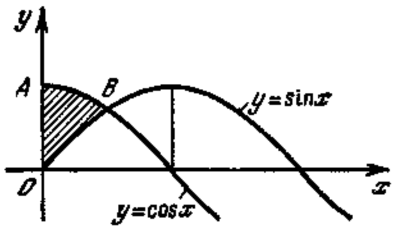

Рис. 93.

Первая получается вращением фигуры OMA, а вторая — фигуры MBA. Поэтому

$$V=\pi\int_0^{2/3}\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2 dx+\pi\int_{2/3}^1 (1-x)^2\,dx=\pi\left[\frac{3^2}{4^2}\frac{x^5}{5}\right]_0^{2/3}+$$
$$+\pi\left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_{2/3}^1=\frac{11}{405}\pi.$$

Пример 3. Вычислим объем, полученный вращением вокруг оси Ox фигуры OBA. Эта фигура ограничена осью Oy, дугой синусоиды $y=\sin x$ и дугой косинусоиды $y=\cos x$ (рис. 93).

Так как точка B пересечения синусоиды и косинусоиды имеет абсциссу, равную $\frac{\pi}{4}$, то внутри рассматриваемого объема x меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Искомый объем сразу вычислить нельзя. Его получим, вычитая из объема, полученного вращением косинусоиды, объем, полученный вращением синусоиды; поэтому

$$V=\pi\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx-\pi\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx=\pi\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}=\pi\left[\frac{1}{2}-0\right]=\frac{\pi}{2}.$$

§ 4. Объем тела, у которого известны площади поперечных сечений

Рассмотрим тело, расположенное так, как указано на рис. 94. Обозначим объем этого тела через V.

Назовем поперечным сечением этого тела фигуру, полученную при пересечении его плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Обозначим площадь сечения $S(x)$. Предположим,

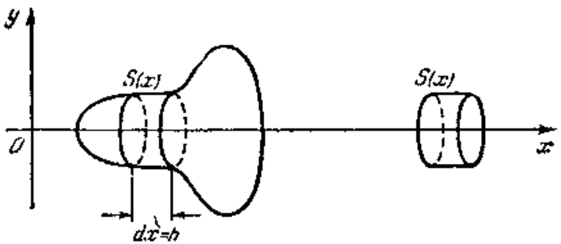

Рис. 94.

что площадь каждого поперечного сечения $S(x)$ известна. При этих условиях определим объем тела. Для этого возьмем два поперечных сечения на расстоянии $h=dx$ друг от друга. Рассмотрим два цилиндра: первый из них имеет своим основанием левое поперечное сечение, второй — правое; высоты обоих цилиндров одинаковы (dx).

Объем куска тела, расположенного между указанными поперечными сечениями, есть приращение объема V. Обозначим его ΔV. Это приращение больше объема первого цилиндра и меньше объема второго. Рассуждая аналогично §§ 1, 3 этой главы, можем сказать, что дифференциал dV

равен объему первого цилиндра, т. е. равен произведению площади основания $S(x)$ на высоту dx, так что $dV=S(x)\,dx$. Интегрируя в пределах от a до b, будем иметь

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{III}$$

Пример 1. Дан цилиндр, высота которого равна H, а радиус основания R. Плоскость APM, проведенная через

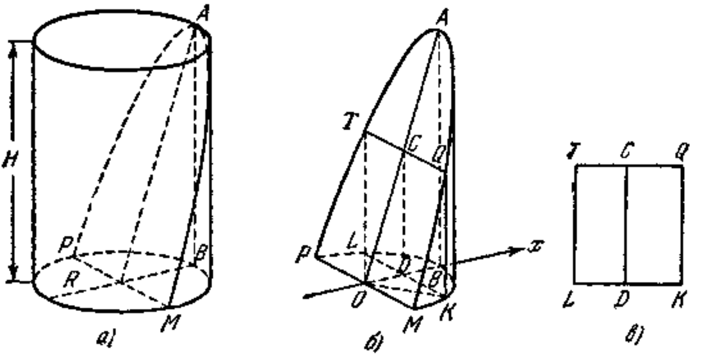

Рис. 95.

диаметр основания, пересекает этот цилиндр (рис. 95). Определим объем меньшей части, отсекаемой плоскостью, т. е. объем части $MPAB$.

Нарисуем отдельно отрезанный кусок (рис. 95, *б*). На этом рисунке $OP=OM=OB=R$, $AB=H$ и $KL=KD+DL=2KD$.

Примем за ось Ox прямую, перпендикулярную диаметру и лежащую в плоскости основания цилиндра. Тогда $OD=x$. Проведем поперечное сечение $KLTQ$; это — прямоугольник (рис. 95, *в*). Его площадь равна $KL\cdot DC$. Выразим ее через x.

Из прямоугольного треугольника ODK найдем KD:

$$KD=\sqrt{OK^2-OD^2}=\sqrt{R^2-x^2}, \text{ поэтому } KL=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Из подобных треугольников ODC и OBA находим:

$$\frac{CD}{OD}=\frac{AB}{OB}, \text{ или } \frac{CD}{x}=\frac{H}{R},$$

откуда $DC=\frac{H}{R}x$. Поэтому площадь поперечного сечения $S=\frac{2H}{R}x\sqrt{R^2-x^2}$. Применяя формулу (III), получаем

$$V=\int_0^R 2\frac{H}{R}x\sqrt{R^2-x^2}\,dx. \qquad (*)$$

Для вычисления этого интеграла сделаем подстановку

$$R^2-x^2=z^2.$$

Отсюда получаем $-2x\,dx=2z\,dz$ и $x\,dx=-z\,dz$. При $x=0$ новое переменное z равно R, при $x=R$ оно равно 0. Сделав замену переменного в (*), получим

$$V=\frac{2H}{R}\int_R^0 z(-z)\,dz=-\frac{2H}{R}\int_R^0 z^2\,dz=-\frac{2H}{R}\left[\frac{z^3}{3}\right]_R^0=\frac{2HR^2}{3}.$$

§ 5. Вычисление давления жидкости

Давление жидкости на погруженную в нее горизонтальную пластинку равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — расстояние пластинки от свободной поверхности жидкости.

Обозначим давление буквой P, удельный вес жидкости γ, площадь пластинки S, а расстояние от свободной поверхности жидкости до пластинки H; тогда

$$P=\gamma SH.$$

В формулировке этого закона существенно, что пластинка горизонтальна. Поверхность жидкости предполагается также горизонтальной плоскостью. Расстояние между параллельными плоскостями точно определено. Если же пластинка расположена не горизонтально, то надо говорить о расстоянии между двумя непараллельными плоскостями; но что это значит?

Укажем, как решается задача в случае пластинки, расположенной вертикально.

Задача 1. Пусть в жидкость, удельный вес которой равен γ, опущена пластинка, имеющая форму круга радиуса R

и расположенная вертикально (рис. 96). Круг касается поверхности жидкости. Определить давление жидкости на эту пластинку (точнее, на одну ее сторону).

Решение. Примем за ось Oy вертикальную прямую, проходящую через центр пластинки, а за ось Ox — горизонтальную прямую, проходящую через эту же точку. (Здесь

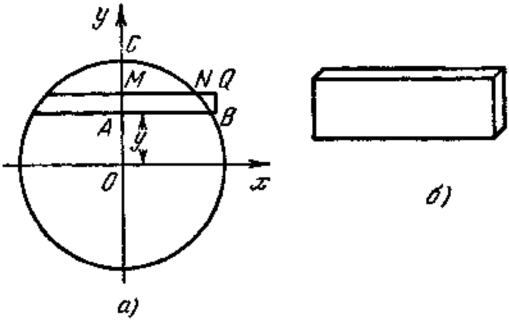

Рис. 96.

мы принимаем y за независимое переменное, а x — за функцию.) Уравнение контура пластинки запишется в виде

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (*)$$

В силу симметрии будем рассматривать только правую половину пластинки. Вырежем из нее горизонтальную полоску $ABNM$ ширины dy, нижняя сторона которой отстоит от начала координат на расстояние y (рис. 96, a). Тогда $OC=R$, $AB=x$, $OA=y$, $AM=dy$. Дополним ее до прямоугольника $ABQM$ и вместо полоски $ABNM$ будем рассматривать этот прямоугольник. Повернем $ABQM$ вокруг AB, придав ему горизонтальное положение. Теперь можно применить закон, указанный в начале этого параграфа. Возьмем столб жидкости, имеющий основанием прямоугольник $ABQM$ (в горизонтальном положении), а высотой — расстояние AC до поверхности жидкости. Объем столба равен $AC \cdot AM \cdot AB = (R-y)\,x\,dy$, а вес $\gamma x(R-y)\,dy$. Эту величину назовем элементарным давлением и обозначим через dP. Итак,

$$dP=\gamma x(R-y)\,dy.$$

Интегрируя в пределах от $-R$ до R, получим искомое давление:

$$P=\int_{-R}^{R}\gamma x(R-y)\,dy.$$

Пределы интегрирования показывают наименьшее и наибольшее значения y в пределах пластинки. Под знаком интеграла стоят две переменные величины: x и y. Исключим x, выразив его через y из уравнения (*). Тогда

$$P=\int_{-R}^{R}\gamma(R-y)\sqrt{R^2-y^2}\,dy.$$

Преобразуем интеграл:

$$P=\gamma\int_{-R}^{R}(R-y)\sqrt{R^2-y^2}\,dy=$$
$$=\gamma\int_{-R}^{R}R\sqrt{R^2-y^2}\,dy-\gamma\int_{-R}^{R}y\sqrt{R^2-y^2}\,dy=$$
$$=\gamma R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,dy-\gamma\int_{-R}^{R}y\sqrt{R^2-y^2}\,dy.$$

Применяя результаты, полученные в пр. 2 и 3 из § 3 гл. X, будем иметь:

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,dy=\left[\frac{R^2}{2}\left(\arcsin\frac{y}{R}+\frac{y}{R}\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}\right)\right]_{-R}^{R}=$$
$$=\frac{R^2}{2}\arcsin 1-\frac{R^2}{2}\arcsin(-1)=\frac{R^2}{2}\pi,$$

$$\int_{-R}^{R}y\sqrt{R^2-y^2}\,dy=\left[-\frac{(R^2-y^2)^{3/2}}{3}\right]_{-R}^{R}=0.$$

Поэтому окончательно $P=\gamma R\frac{R^2}{2}\pi-\gamma\cdot 0=\gamma\frac{\pi R^3}{2}$.

Итак, давление жидкости на половину пластинки (правую) равно $\frac{\gamma\pi R^3}{2}$. Давление на всю пластинку равно $\gamma\pi R^3$.

§ 6. Вычисление работы силы

Если постоянная сила F направлена по оси Ox и ее точка приложения P перемещается также вдоль оси Ox на отрезок (a, b), то работа силы на этом участке вычисляется по формуле

$$A = F\,|ab|. \qquad (*)$$

Если же сила меняет величину, хотя и остается направленной по оси, то формулу (*) уже применить нельзя.

Задача 1. Сила F направлена по оси Ox и ее величина зависит от абсциссы x точки P приложения силы, т. е. $F = F(x)$. Точка P перемещается вдоль отрезка (a, b), расположенного на оси Ox. Вычислить работу силы $F(x)$ на отрезке (a, b).

Решение. К решению этой задачи нужно применить определенный интеграл, как предел интегральных сумм (см. гл. XI, § 2). Для этого разобьем отрезок (a, b) на мелкие части при помощи точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ (рис. 97).

Будем считать, что сила $F(x)$ сохраняет на отрезке $x_{k-1}x_k$ то значение, которое она имела в его левом конце, т. е. $F(x_{k-1})$. Тогда работу на отрезке $x_{k-1}x_k$ можно вычислить по формуле(*), она равна $F(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$. Поступая аналогично на каждом отрезке, получим результаты, сведенные в таблицу:

№ отрезка	Длина отрезка	Величина силы	Работа на отрезке
1	$x_1 - a$	$F(a)$	$F(a)(x_1 - a)$
2	$x_2 - x_1$	$F(x_1)$	$F(x_1)(x_2 - x_1)$
...	...	...	...
k	$x_k - x_{k-1}$	$F(x_{k-1})$	$F(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$
$k+1$	$x_{k+1} - x_k$	$F(x_k)$	$F(x_k)(x_{k+1} - x_k)$
...	...	...	...
n	$b - x_{n-1}$	$F(x_{n-1})$	$F(x_{n-1})(b - x_{n-1})$

Складывая работы, вычисленные на отдельных отрезках, получим приближенное значение искомой работы:

$$A_n = F(a)(x_1 - a) + F(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + F(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \ldots + F(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Это интегральная сумма. Если начнем измельчать разбиение, то пределом интегральной суммы будет являться интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

Таким образом, работа A силы $F(x)$ на отрезке (a, b) выражается определенным интегралом

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad \text{(IV)}$$

Заметим, что все рассуждения проводились в предположении, что сила $F(x)$ непрерывно меняется с изменением x и что она зависит только от x.

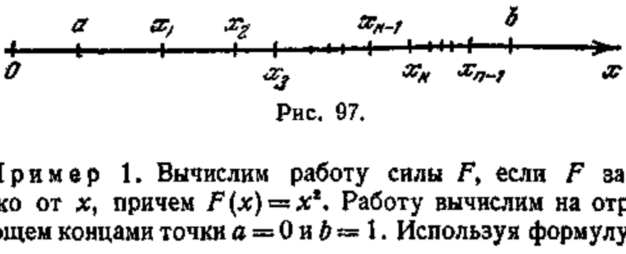

Рис. 97.

Пример 1. Вычислим работу силы F, если F зависит только от x, причем $F(x) = x^2$. Работу вычислим на отрезке, имеющем концами точки $a = 0$ и $b = 1$. Используя формулу (IV), получим

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислим работу силы на отрезке от 2 до 5, если сила F определена уравнением $F = -x$. Применяя формулу (IV), получим

$$A = \int_2^5 (-x)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = -\frac{21}{2}.$$

Пример 3. Вычислим работу силы, указанной в предыдущем примере, на отрезке от -3 до $+3$. Применяя формулу (IV), получим

$$A=\int_{-3}^{3}-x\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{3}=0.$$

Замечание. Работа может быть положительной и отрицательной, а также и равной нулю, как это видно из приведенных примеров. Знак работы зависит от того, совпадают ли по знаку перемещение и направление силы.

§ 7. Длина дуги

Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$y=f(x), \tag{1}$$

и на ней отметим точку M_0, абсциссу которой обозначим x_0, а ординату y_0. В силу уравнения (1) $y_0=f(x_0)$. Длину дуги, расположенной на кривой (1), будем отсчитывать от точки M_0.

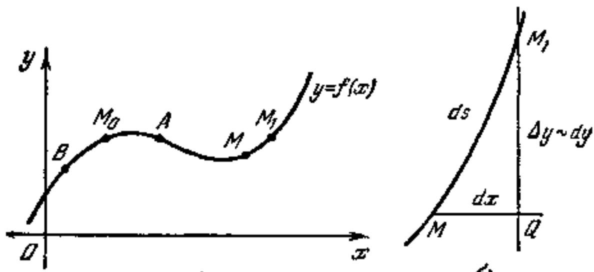

Рис. 98.

Если дуга идет в сторону возрастания абсциссы x, то будем считать ее положительной, если в другую сторону, то — отрицательной. На рис. 98, *а* дуга M_0A положительна, дуга M_0B отрицательна. Условимся считать точку M_0 неподвижной, а точку $M(x, y)$ будем двигать по кривой, тогда для нее $y=f(x)$. Таким образом, длина дуги M_0M является функцией x; обозначим ее $L(x)$. Дадим x приращение $h=dx$, тогда вместо точки M получим новую точку M_1. Координаты этой точки будут $x+dx$ и $y+dy$. Дуга M_0M получает приращение MM_1. Это значит, что функция $L(x)$ получит приращение:

$$\Delta L = L(x+dx) - L(x).$$

Делая ошибку в бесконечно малых высшего порядка, можно считать, что $\Delta y = dy$ и что дуга MM_1 является почти отрезком прямой (рис. 98, *б*).

Применяя теорему Пифагора, получим

$$MM_1 = \sqrt{MQ^2 + QM_1^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Выражение $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ называется дифференциалом дуги и обозначается ds, так что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{2}$$

Дифференциал дуги можно выразить через производную, а именно:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

тогда

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{3}$$

Для того чтобы вычислить длину дуги M_0M, где точка M имеет абсциссу x, а ординату $y = f(x)$, надо проинтегрировать дифференциал дуги ds. Интегрируя, получаем

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{V}$$

Пример 1. Вычислим длину дуги окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первом координатном угле.

Из уравнения окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ находим производную $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Тогда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Интегрируя, получим

$$L=\int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Для вычисления этого интеграла делаем замену переменного интегрирования $x=R\sin t$. Отсюда при $x=0$ переменное $t=0$, а при $x=R$ переменное $t=\frac{\pi}{2}$. Дифференцируя, имеем $dx=R\cos t\,dt$. Поэтому

$$L=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\cos t\,dt}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}}=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t}\,dt=R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi R}{2},$$

что, конечно, совпадает с известным результатом.

Упражнения к гл. XII

1. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной линиями: $y=-\frac{1}{2}x^2+12$, $y=x$, $x=0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пересекающимися дугами кривых: $y=x^2-3x$, $y=\frac{1}{4}(x^2-3x)$.

4. Объем ограничен поверхностью, полученной вращением дуги косинусоиды $y=\cos x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ и плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проходящей через начало координат; вычислить объем этого тела.

5. Тело ограничено поверхностью, полученной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y=4-x^2$, лежащей в первой четверти, и осями координат. Вычислить его объем.

6. Кусок плоскости, лежащий в первой четверти и ограниченный линиями: $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=0$, вращается вокруг оси Ox. Вычислить объем тела вращения.

7. Тело стоит на плоскости xOy и имеет основанием область G, ограниченную параболой $y=\sqrt{x}$ и прямой $x=1$. Через точку, лежащую на оси Ox и имеющую абсциссу x, проводим плоскость, перпендикулярную оси Ox; она пересечется с областью G по отрезку прямой (хорда параболы).

В проведенной плоскости на указанной хорде строим прямоугольник с высотой, равной расстоянию плоскости от начала координат. Если это будет проделано для каждого x в пределах от 0 до 1, то прямоугольники составят тело. Вычислить объем этого тела.

8. Вычислить давление воды на прямоугольник, опущенный вертикально в воду, если известно, что стороны прямоугольника равны 8 и 12 и что сторона, равная 8, находится на свободной поверхности воды.

9. Вычислить работу силы, действующей на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$ по оси Ox и равной $F(x)=\frac{1}{x+1}$.

10. Вычислить длину дуги, принадлежащей кривой $y^2=x^3$ и имеющей концы в точках с абсциссами $a=0$, $b=4$.

ГЛАВА XIII

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Вычисления при помощи интегральных сумм

Очень часто при решении задач физического и технического содержания получаются определенные интегралы, которые нельзя вычислить при помощи первообразных функций (так как первообразные неизвестны) или это вычисление приводится к очень сложным и длительным выкладкам. В этих случаях решают задачи приближенно, заменяя вычисление интеграла вычислением интегральной суммы. Для вычисления интегральной суммы надо уметь только вычислять значения подынтегральной функции, а если они уже известны, то для дальнейших вычислений требуются только арифметические действия.

Приведем пример вычисления интеграла при помощи интегральных сумм.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Для этого разобьем промежуток интегрирования на десять частей точками: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Вычислим значения подынтегральной функции для этих значений независимого переменного. Эти значения можно найти в «Пятизначных математических таблицах» Сегала и Семендяева или в «Справочнике по высшей математике» Бронштейна и Семендяева. Если же этих таблиц нет, то можно воспользоваться логарифмическими таблицами. Имея таблицы логарифмов, будем поступать следующим образом: сначала прологарифмируем выражение $y=e^{-x^2}$ и, зная, что

$\lg e = 0{,}43429$, найдем логарифмы нужных чисел, а затем и сами числа. Результаты сведены в таблицу:

x	$y = e^{-x^2}$
0,0	1,00000
0,1	0,99005
0,2	0,96079
0,3	0,91393
0,4	0,85214
0,5	0,77880
0,6	0,69768
0,7	0,61263
0,8	0,52729
0,9	0,44486
	7,77817

Воспользуемся формулой (1) из § 1 гл. XI. В нашем случае все разности $x_{k+1} - x_k$ равны 0,1; поэтому, вынося их за скобку, получим внутри скобок сумму всех значений функции. Эта сумма равна 7,77817. Умножим ее на 0,1, получим 0,777817. Таким образом, интеграл приближенно вычислен:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}777817.$$

Нами вычислен приближенно определенный интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, но неизвестно, с какой степенью точности проведено это вычисление. Для того чтобы иметь представление о точности получаемого результата, поступают следующим образом: проделывают аналогичные вычисления, только разбивают отрезок интегрирования на большее число частей (обычно это число удваивают). В нашем примере разобьем на двадцать частей. Конечно, при этом получится другой результат, но некоторые цифры сохраняются и в новом результате. По числу сохранившихся цифр и будем судить о точности вычисления. Проделав это, получим

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0{,}75682.$$

Конечно, эти вычисления не позволяют найти точность вычисления, но все-таки вселяют некоторую уверенность в первом десятичном знаке. В следующем параграфе будет изложен другой метод, который при том же объеме работы, вообще говоря, дает более точный результат.

§ 2. Формула Симпсона

Помимо приближенного вычисления интегралов при помощи интегральных сумм, существуют различные формулы, выражающие приближенно определенный интеграл. Выведем одну из них, так называемую «формулу Симпсона». Для ее вывода решим предварительно две задачи.

Задача 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и осью абсцисс.

Решение. Как было показано раньше, площадь криволинейной трапеции выражается определенным интегралом. В рассматриваемом случае этот интеграл запишется следующим образом:

$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx.$$

Вычислим интеграл и произведем возможные упрощения:

$$S = a\int_{-h}^{h} x^2\, dx + b\int_{-h}^{h} x\, dx + c\int_{-h}^{h} dx =$$
$$= a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{h} + b\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-h}^{h} + c\,[x]_{-h}^{h} = a\left[\frac{h^3}{3} - \frac{(-h)^3}{3}\right] +$$
$$+ b\left[\frac{h^2}{2} - \frac{(-h)^2}{2}\right] + c\,[h - (-h)] = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch.$$

Итак, искомая площадь выражается формулой

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch. \qquad (1)$$

Задача 2. Написать уравнение параболы, проходящей через точки $A(-h, y_0)$, $B(0, y_1)$ и $C(h, y_2)$, где числа y_0, y_1, y_2 произвольны, а h — любое положительное число. Кроме того, вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой параболой, осью абсцисс, прямыми $x=-h$ и $x=h$.

Решение. Уравнение искомой параболы можно записать в виде

$$y=ax^2+bx+c. \tag{2}$$

Поскольку по условию точка A должна лежать на параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2), т. е.

$$y_0=a(-h)^2+b(-h)+c. \tag{2'}$$

Также условия того, что точки B и C лежат на параболе, запишутся следующим образом:

$$y_1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c, \tag{2''}$$

$$y_2=ah^2+bh+c. \tag{2'''}$$

В уравнениях (2'), (2''), (2''') неизвестными являются a, b и c; мы найдем их, решая систему уравнений (2'), (2''), (2'''). Из уравнения (2'') находим, что

$$c=y_1. \tag{3}$$

Подставляя найденное значение в уравнения (2') и (2'''), будем иметь:

$$y_0=ah^2-bh+y_1,$$

$$y_2=ah^2+bh+y_1.$$

Сложим почленно эти уравнения и найдем a:

$$y_0+y_2=2ah^2+2y_1,$$

$$a=\frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}, \tag{4}$$

а затем вычтем из второго первое и найдем b:

$$y_2-y_0=2bh,$$

$$b=\frac{y_2-y_0}{2h}. \tag{5}$$

Итак, коэффициенты уравнения (1) определены формулами (3), (4) и (5), т. е. уравнение искомой параболы напишется так:

$$y=\frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}x^2+\frac{y_2-y_0}{2h}x+y_1.$$

Для вычисления площади применим результат задачи 1, подставив в формулу (1) значения c и a из формул (3) и (4); будем иметь

$$S=\frac{2}{3}\cdot\frac{y_0-2y_1+y_2}{2h^2}h^3+2y_1h.$$

Сделаем возможные упрощения:

$$S=\frac{1}{3}(y_0-2y_1+y_2)h+2y_1h=$$
$$=\frac{y_0-2y_1+y_2+6y_1}{3}h=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)h.$$

Искомая площадь выражается формулой

$$S=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)h. \tag{6}$$

Эту формулу можно прочесть так: площадь, ограниченная параболой, двумя ординатами y_0 и y_2 и отрезком оси абсцисс, длиной $2h$, равна одной трети произведения двух множителей. Первый множитель является суммой крайних ординат y_0 и y_2 и учетверенной средней ординаты y_1, второй множитель равен половине отрезка оси абсцисс, т. е. h.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=-x^2+6x$, прямыми $x=1$ и $x=5$ и отрезком оси абсцисс $1\leqslant x\leqslant 5$.

Найдем крайние ординаты: $y_0=-1^2+6\cdot 1=5$, $y_2=-5^2+6\cdot 5=5$. Отрезок оси абсцисс равен $2h=5-1=4$, $h=2$. Средняя ордината соответствует средней точке отрезка, т. е. абсциссе $x=\frac{1+5}{2}=3$, поэтому средняя ордината $y_1=-3^2+6\cdot 3=9$. Употребляя формулу (6), получаем

$$S=\frac{1}{3}(5+4\cdot 9+5)2=\frac{92}{3}.$$

Применим полученные результаты к приближенному вычислению определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Этот интеграл можно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Поэтому приближенное вычисление интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильно приближенному вычислению площади указанной трапеции.

Обозначим площадь трапеции через S, тогда

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Разобьем отрезок (a, b) на $2n$ равных частей; длина каждой части будет равна $h=\frac{b-a}{2n}$. Эти мелкие части (отрезки) имеют концы в точках с абсциссами $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, ..., $x_{2n}=a+2nh=b$. Через эти точки проведем ординаты точек кривой $y=f(x)$ и обозначим их

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ \ldots,\ y_{2n}=f(x_{2n}),$$

а их концы — буквами A_0, A_1, A_2, ..., A_{2n}. Точки A_0, A_1, A_2, ..., A_{2n} разобьем на тройки:

первая тройка состоит из точек A_0, A_1, A_2,
вторая тройка состоит из точек A_2, A_3, A_4,
. . . .
последняя тройка состоит из точек A_{2n-2}, A_{2n-1}, A_{2n}.

Через точки, принадлежащие одной тройке, проведем дугу параболы, получим: первая дуга $A_0A_1A_2$, вторая дуга $A_2A_3A_4$, ..., последняя дуга $A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$.

Рассмотрим, наконец, «двойные полоски». Первая из них ограничена дугой параболы $A_0A_1A_2$, ординатами y_0 и y_2 и отрезком $2h$ оси абсцисс; вторая ограничена дугой $A_2A_3A_4$, ординатами y_2 и y_4 и отрезком оси абсцисс $2h$, ..., последняя двойная полоска ограничена дугой $A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$, ординатами y_{2n-2} и y_{2n} и отрезком $2h$ оси абсцисс.

Обозначим двойные полоски s_1, s_2, s_3, ..., s_n. При мелком разбиении, т. е. при маленьких h, сумма площадей двойных полосок $s_1+s_2+s_3+\ldots+s_n$ будет достаточно мало отличаться от площади S.

Площади двойных полосок можно вычислять по формуле (6). Получим:

площадь двойной полоски s_1 равна $\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)h$,

площадь двойной полоски s_2 равна $\frac{1}{3}(y_2+4y_3+y_4)h$,

. . . .

площадь двойной полоски s_n равна $\frac{1}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})h$.

Следовательно, сумма площадей всех двойных полосок выражается так:

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

или

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+\ldots$$
$$\ldots+y_{2n-1}+4y_{2n-1}+y_{2n}].$$

Объединим все y с нечетными номерами и все y с четными номерами, кроме y_0 и y_{2n}. Заметим при этом, что, кроме y_0 и y_{2n}, каждый y с четным номером встречается два раза. Итак,

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=\frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})].$$

При малом h приближенно имеем $S\approx s_1+s_2+\ldots+s_n$. Поэтому

$$S\approx\frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})],$$

или, поскольку $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $h=\frac{b-a}{2n}$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})].$$

Эта формула называется формулой Симпсона.

Пример 2. Вычислим вновь интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$, который был приближенно вычислен в § 1. Разобьем промежуток интегрирования на двадцать частей. Напоминаем, что для метода Симпсона требуется обязательно четное число частей. Выпишем значения подынтегральной функции, располагая их определенным образом в таблице:

k	x_k	y_0, y_{20}	y_k (k нечетное)	y_k (k четное)
0	0,00	1,00000		
1	0,05		0,99750	
2	0,10			0,99005
3	0,15		0,97775	
4	0,20			0,96079
5	0,25		0,93941	
6	0,30			0,91393
7	0,35		0,88470	
8	0,40			0,85214
9	0,45		0,81668	
10	0,50			0,77889
11	0,55		0,73971	
12	0,60			0,69763
13	0,65		0,65540	
14	0,70			0,61268
15	0,75		0,56979	
16	0,80			0,52729
17	0,85		0,48554	
18	0,90			0,44486
19	0,95		0,40555	
20	1,00	0,36788		
		1,36788	7,47203	6,77826
			$\times$ 4	$\times$ 2
			29,88812	13,55652

$$\begin{array}{r} 1,36788 \\ +\,29,88812 \\ 13,55652 \\ \hline 44,81252 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44,81252 & 60 \\ \cline{2-2} -\,42,0 & 0,74688 \\ \cline{1-1} 2\,81 & \\ -\,2\,40 & \\ \cline{1-1} 412 & \\ -\,360 & \\ \cline{1-1} 525 & \\ -\,480 & \\ \cline{1-1} 452 & \end{array}$$

Следовательно, при помощи формулы Симпсона получено приближенное значение

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}74688.$$

В этом результате первые три десятичных знака верны (это можно установить, сравнивая полученное число с числом, полученным путем деления на все большее число промежутков, или оценивая ошибку, что хотя трудно, но возможно).

Если сравнивать с результатом, полученным в § 1 (при делении на двадцать частей), то видно преимущество формулы Симпсона; при одинаковом объеме работы эта формула дала три верных десятичных знака, в то время как в § 1 был получен только один верный знак.

ГЛАВА XIV

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Функции многих переменных

В главе V было дано определение функциональной зависимости. Теперь обобщим это определение.

Будем рассматривать несколько переменных величин: x, y, z, t, w, ...

Определение. *Если каждой возможной совокупности числовых значений переменных x, y, z, t, ... соответствуют определенные значения переменного w, то w называется зависимым переменным, или функцией от независимых переменных x, y, z, t, ..., или функцией многих переменных*. Функция многих переменных обозначается так: $w=f(x, y, z, \ldots, t)$. Приведем примеры функций двух и трех переменных.

Пример 1. Площадь S прямоугольного треугольника выражается через его катеты x и y формулой $S=\frac{xy}{2}$. Поэтому площадь S есть функция двух независимых переменных.

Пример 2. По закону Ома $I=\frac{V}{R}$, где I — ток, V — напряжение, а R — сопротивление. Значит, ток I есть функция двух переменных: V и R.

Пример 3. Сила F равна произведению массы на ускорение: $F=ma$. Здесь опять сила есть функция двух переменных: m и a.

Пример 4. Как известно, площадь косоугольного треугольника выражается через две его стороны и угол между ними следующим образом:

$$S=\frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Поэтому площадь треугольника является функцией трех независимых переменных: a, b и γ.

Может случиться, что уравнение, которое связывает переменные величины, не разрешено относительно ни одной из них, тем не менее оно определяет функцию или функции. Например, уравнение $x^2+zy-1=0$ определяет функцию $z=\frac{1-x^2}{y}$. Уравнение $x^2+y^4+z^2=1$ определяет функции $z=\sqrt{1-x^2-y^4}$ и $z=-\sqrt{1-x^2-y^4}$.

Определение. *Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно этой функции, называется неявной.*

Иногда удается представить неявную функцию в явном виде. Например, если дана неявная функция, определенная уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, то, решая уравнение, получим две явные функции:

$$z=+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

и

$$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Совокупность всех значений независимых переменных, для которых можно найти значения функции, называется областью существования функции.

Например, если задана функция $z=\ln(x^2+y)$, то область ее существования будет состоять из значений x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2+y>0$.

§ 2. Координаты в пространстве

Для того чтобы иметь возможность дать геометрическое истолкование функции двух переменных, введем в пространстве систему координат.

Возьмем три взаимно перпендикулярные и пересекающиеся в одной точке прямые и на каждой из них: 1) установим направление, 2) выберем единицу масштаба, 3) укажем начало отсчета. Обычно масштаб берется одинаковый по всем трем прямым, а за начало отсчета принимается точка пересечения данных прямых.

Совокупность трех взаимно перпендикулярных пересекающихся в одной точке прямых, на которых: 1) установлено направление, 2) введен масштаб и 3) выбрано начало отсчета, называется системой координат.

Каждую из этих прямых называют осью координат, одну из них — осью абсцисс или осью Ox, другую — осью ординат или осью Oy и третью — осью аппликат или осью Oz. Точку начала отсчета, общую для трех осей, называют началом координат и обозначают буквой O. Положительное направление осей указано на рис. 99.

Пусть P — произвольная точка пространства. Опустим из нее перпендикуляры на оси координат и назовем проекцию точки на ось Ox буквой A, на ось Oy — буквой B и на ось Oz — буквой C (рис. 99).

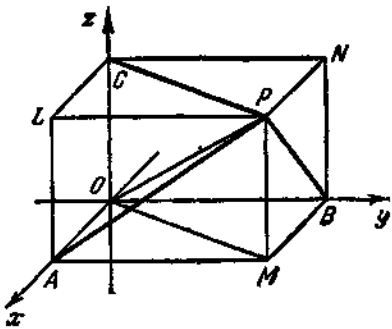

Рис. 99.

Отрезки OA, OB, OC назовем координатными отрезками точки P (ср. с гл. I). Определение координат точки остается таким же, как и в гл. I, только добавляется, что координата, измеряемая по оси Oz, называется *аппликатой*. Точка P, имеющая абсциссой число x, ординатой число y и аппликатой число z, записывается так: $P(x, y, z)$.

Точки A, B и C можно получить и другим способом. Покажем это для точки A (рис. 99). Спроектируем точку P на плоскость xOy, т. е. опустим из нее перпендикуляр на эту плоскость; получим точку M. Теперь опустим перпендикуляр из M на ось Ox. Основанием перпендикуляра на ось Ox как раз и будет точка A (это следует из теоремы о трех перпендикулярах).

Часто при изображении точки P для наглядности, наряду с осями координат, изображают прямоугольный параллелепипед. Одна из вершин параллелепипеда находится в заданной точке P, а противоположная — в начале координат O; три его ребра расположены по осям координат. На рис. 99 это параллелепипед $OAMBCLPN$. Тогда становится очевидным, что $OA = BM = x$, $OB = AM = y$, $OC = MP = z$

и что OP — диагональ параллелепипеда. Так как $\triangle MPO$ и $\triangle OAM$ прямоугольные, то $OP^2 = OM^2 + MP^2$ и $OM^2 = OA^2 + AM^2$, откуда $OP^2 = OA^2 + AM^2 + MP^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким образом, *расстояние точки от начала координат равно квадратному корню из суммы квадратов ее координат.*

Задача 1. Найти расстояние между точками $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Обозначим проекции точек P_1 и P_2 на ось Ox соответственно через A_1 и A_2 (рис. 100). Тогда проекцией отрезка P_1P_2 будет являться отрезок A_1A_2. Выразим отрезок A_1A_2 через координаты начала и конца, он равен координате конца минус координата начала, т. е. $A_1A_2 = x_2 - x_1$, а его длина равна $|A_1A_2| = |x_2 - x_1|$ (см. гл. I). Кроме того, в силу равенства отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, имеем: $|A_1A_2| = |KC|$. Аналогично, проектируя точки P_1 и P_2 на ось Oy, получим, что $B_1B_2 = y_2 - y_1$, $|B_1B_2| = |y_2 - y_1|$ и $|KP_1| = |B_1B_2|$. Также получаем, что $CP_2 = z_2 - z_1$ и $|CP_2| = |z_2 - z_1|$. Диагональ $|P_1P_2|$ прямоугольного параллелепипеда равна

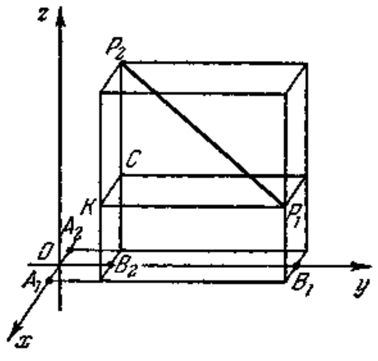

Рис. 100.

$$|P_1P_2| = \sqrt{KC^2 + KP_1^2 + CP_2^2}$$

или

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (*)$$

Следовательно, *расстояние между двумя точками равно квадратному корню из суммы квадратов разностей соответствующих координат.*

§ 3. Некоторые простые уравнения

1. Уравнения координатных плоскостей. Рассмотрим, например, плоскость xOy и произвольную точку M на ней.

Так как плоскость $xOy \perp Oz$, то перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Oz, попадает в начало координат, а это значит, что аппликата точки равна нулю. Очевидно и обратное, т. е. если аппликата точки равна нулю, то эта точка лежит в плоскости xOy. Поэтому уравнение $z=0$ характеризует плоскость xOy; оно является уравнением плоскости xOy, т. е. координаты любой точки плоскости xOy удовлетворяют уравнению $z=0$.

Рассуждая аналогично, получим, что координаты любой точки, принадлежащей плоскости xOz, удовлетворяют уравнению $y=0$, т. е. это уравнение есть уравнение координатной плоскости xOz.

Также уравнение $x=0$ есть уравнение координатной плоскости yOz.

2. Уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости. Если точка M лежит в плоскости, параллельной плоскости xOy, то ее аппликата равна расстоянию точки от плоскости xOy, взятому со знаком плюс, если точка лежит выше, и со знаком минус, если она лежит ниже координатной плоскости xOy. Поэтому уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOy, имеет вид $z=c$, где c — постоянное.

Также плоскость, параллельная плоскости xOz, имеет уравнение $y=b$.

Плоскость, параллельная плоскости yOz, имеет уравнение $x=a$.

3. Уравнения координатных осей. Ось Oz является пересечением плоскости xOz и плоскости yOz, поэтому любая ее точка лежит в плоскости xOz и в плоскости yOz. Следовательно, координаты любой точки, принадлежащей оси Oz, должны удовлетворять и уравнению $y=0$ и уравнению $x=0$. Эти два уравнения $x=0$ и $y=0$ являются уравнениями оси Oz. Аналогично уравнениями оси Oy будут $x=0$, $z=0$. Уравнениями оси Ox будут $y=0$, $z=0$.

§ 4. Поверхности

Пусть дана функция двух независимых переменных, определенная уравнением

$$z=f(x, y). \tag{1}$$

Будем рассматривать переменные x, y, z как координаты точки.

Возьмем на плоскости xOy точку M, т. е. укажем пару чисел x и y (ее координаты). В силу уравнения (1) паре чисел x и y соответствует определенное число z. Поэтому можно сказать, что уравнение (1) ставит в соответствие точке $M(x, y)$, лежащей на плоскости xOy, точку $P(x, y, z)$, лежащую в пространстве. Меняя положение точки M на плоскости xOy, будем получать различные точки $P(x, y, z)$. Геометрическое место точек $P(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называется поверхностью. Для примера возьмем формулу, выражающую расстояние между двумя точками (формула (*) из § 2):

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Предположим, что точка P_1 неподвижна, расстояние между точками P_1 и P_2 постоянно и равно R, а точка P_2 может двигаться. Тогда геометрическое место точек P_2 будет являться поверхностью шара, или, как иначе говорят, сферой. Обозначим координаты точки P_1 через a, b, c, а координаты P_2 через x, y, z (здесь x, y и z являются переменными величинами). Тогда равенство (*) перепишется в виде

$$R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{**}$$

Это — неявная функция. Координаты, удовлетворяющие уравнению (**), определяют точки, лежащие на сфере. Поэтому уравнение (**) называют уравнением сферы, имеющей центр в точке (a, b, c) и радиус, равный R.

Таким образом, уравнение (1) определяет поверхность и называется уравнением поверхности.

Для того чтобы выяснить вид поверхности, определенной уравнением (1), применяют метод сечений, с которым мы познакомимся на примерах.

Пример 1. Выясним вид поверхности, заданной уравнением

$$ax+by+cz+d=0, \tag{2}$$

иначе говоря, найдем геометрический смысл неявной функции, определенной уравнением (2). Для этого найдем сначала точки пересечения поверхности с осью Oz. Поскольку для любой точки, лежащей на оси Oz, абсцисса и ордината равны нулю, то искомая точка удовлетворяет этим условиям и уравнению (2). Подставляя в уравнение (2) $x=0$, $y=0$, найдем $z=-\frac{d}{c}$. Таким образом, точка $C\left(0,\ 0-\frac{d}{c}\right)$ есть точка пересечения поверхности, заданной уравнением (2), с осью Oz. Чтобы найти точку пересечения поверхности с осью Ox, положим в уравнении (2) $y=0$ и $z=0$. Отсюда найдем $x=-\frac{d}{a}$. Итак, точка $A\left(-\frac{d}{a},\ 0,\ 0\right)$ есть точка пересечения поверхности с осью Ox.

Аналогично, полагая в уравнении (2) $x=0$ и $z=0$, получим, что точка $B\left(0,\ -\frac{d}{b},\ 0\right)$ является точкой пересечения поверхности (2) с осью Oy (рис. 101).

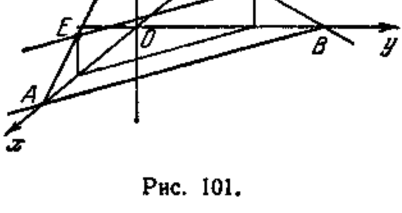

Рис. 101.

Выясним, что получится при пересечении поверхности (2) с плоскостью xOz. Так как уравнение этой плоскости $y=0$, то, полагая в уравнении (2) $y=0$, получим

$$ax+cz+d=0. \tag{3}$$

Как было показано в гл. II, всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости, поэтому уравнение (3) определяет прямую, лежащую в плоскости xOz. Прямая, определенная уравнением (3), проходит через точки A и C, так как их координаты удовлетворяют уравнению (3). Проверим это для точки A:

$$a\left(-\frac{d}{a}\right)+c\cdot 0+d=-d+d=0.$$

Полагая в уравнении (2) $x=0$, найдем пересечение поверхности с координатной плоскостью yOz. Снова получим прямую, определяемую уравнением

$$by+cz+d=0, \tag{4}$$

проходящую через точки B и C.

Наконец, пересекая поверхность (2) плоскостью xOy, т. е. полагая в уравнении (2) $z=0$, получим

$$ax+by+d=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) определяет прямую, лежащую в плоскости xOy и проходящую через точки A и B.

Итак, поверхность, заданная уравнением (2), пересекается с координатными плоскостями по треугольнику ABC.

Чтобы выяснить окончательно вид поверхности, пересечем ее плоскостью, параллельной плоскости xOy, которая имеет уравнение $z=h$. Полагая в уравнении (2) $z=h$, получим

$$ax+by+ch+d=0. \tag{6}$$

Это — уравнение прямой, лежащей в плоскости $z=h$. Найдем точку пересечения прямой (6) с плоскостью yOz; для этого положим в уравнении (6) $x=0$, тогда $y=-\frac{ch+d}{b}$. Найденная точка $K\left(0,\ -\frac{ch+d}{b},\ h\right)$ лежит и на прямой BC, поскольку ее ордината $-\frac{ch+d}{b}$ и аппликата h удовлетворяют уравнению (4).

Также, если в уравнении (6) положить $y=0$, то найдем точку пересечения прямой (6) с координатной плоскостью xOz; это будет точка $E\left(-\frac{ch+d}{a},\ 0\right)$. Точка E лежит и на прямой AC, так как ее координаты удовлетворяют уравнению (3).

Число h можно менять, поэтому в результате проведенного исследования получается, что поверхность, определяемая уравнением (2), образована прямой KE, скользящей по пересекающимся прямым AC и CB. Эта поверхность является плоскостью.

Итак, уравнение первой степени с тремя неизвестными в пространстве определяет плоскость.

Пример 2. Найдем вид поверхности, определяемой уравнением

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}. \tag{7}$$

Пересечем поверхность плоскостью xOz, т. е. положим в уравнении (7) $y=0$. Получим $z=\frac{x^2}{a^2}$; это — уравнение параболы, лежащей в координатной плоскости xOz (рис. 102).

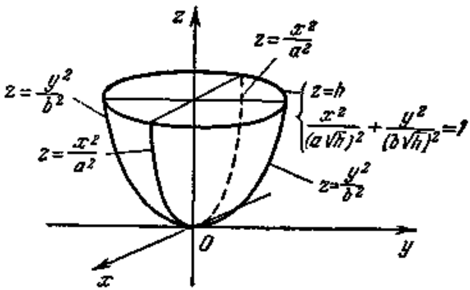

Рис. 102.

Пересекая поверхность плоскостью yOz, т. е. полагая в уравнении (7) $x=0$, получим уравнение $z=\frac{y^2}{b^2}$, которое является также уравнением параболы (см. гл. III).

Найдем пересечение исследуемой поверхности с плоскостью $z=h$, т. е. с плоскостью, параллельной плоскости xOy и отстоящей от нее на расстояние h. Полагая $z=h$ в уравнении (7), получим $h=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, или

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2}=1.$$

Это есть уравнение эллипса с полуосями $a\sqrt{h}$ и $b\sqrt{h}$. Чем больше h, тем больше и полуоси эллипса, следовательно, эллипс расширяется по мере удаления от координатной плоскости xOy. При $h<0$ выражения для полуосей теряют смысл, так как корень квадратный делается мнимым. При $h=0$ полуоси равны нулю.

Поэтому исследуемая поверхность образована эллипсами, расположенными в плоскостях, параллельных плоскости $z=0$, и нанизанными на параболы $z=\frac{x^2}{a^2}$ и $z=\frac{y^2}{b^2}$. Эта поверхность называется ***эллиптическим параболоидом.***

Пример 3. Исследуем вид поверхности, заданной уравнением

$$z=e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}. \tag{8}$$

Найдем пересечение с плоскостью Π_1, уравнение которой $x=1$ (рис. 103). Уравнение (8) после подстановки в него $x=1$ примет вид

$$z=e^{-(y-1)^2}. \tag{9}$$

Эта кривая была исследована в гл. VIII, § 5, пр. 3; она лежит в плоскости, параллельной плоскости yOz и отстоящей от нее на расстояние 1.

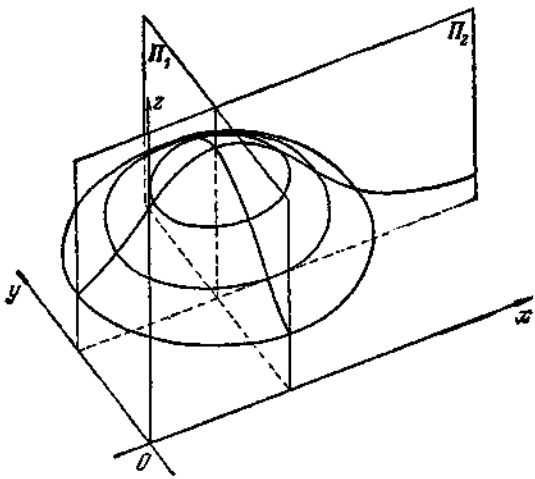

Рис. 103.

Пересекая поверхность (8) плоскостью Π_2, уравнение которой $y=1$, получим уравнение кривой того же типа, что и (9):

$$z=e^{-(x-1)^2}. \tag{10}$$

Ищем пересечение исследуемой поверхности с плоскостью, параллельной плоскости xOy и отстоящей от нее на расстояние h; уравнение этой плоскости $z=h$.

Подставляя $z=h$ в уравнение (8), получаем

$$h=e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}.$$

Прологарифмируем обе части последнего равенства и преобразуем; будем иметь:

$$-(x-1)^2-(y-1)^2=\ln h,$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=-\ln h,$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=\ln\frac{1}{h}. \qquad (11)$$

Это — уравнение окружности радиуса $\sqrt{\ln\frac{1}{h}}$, центр которой находится в точке $(1,\ 1,\ h)$. Чтобы радиус являлся действительным числом, под знаком квадратного корня должно стоять положительное число. А так как логарифмы положительны для чисел, бо́льших единицы, то должно быть $\frac{1}{h}>1$ или $h<1$. Это значит, что рассматриваемая поверхность пересекается с плоскостью $z=h$ только в том случае, если $0<h<1$. Если $h=1$, то радиус обращается в нуль, т. е. окружность вырождается в точку. Итак, поверхность, определяемая уравнением (8), образована из окружностей (11), нанизанных на кривые (9) и (10). Окружности, образующие поверхность, увеличиваются по мере уменьшения h, т. е. по мере приближения к координатной плоскости xOy.

§ 5. Линии уровня

Определение. *Линией уровня называется геометрическое место точек, расположенных на поверхности и имеющих одну и ту же определенную аппликату.* Например, если дана поверхность $z=x^2+y^2$, то, взяв $z=1$, получим $x^2+y^2=1$. Уравнение $z=1$ определяет плоскость, параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние, равное единице. Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет окружность, лежащую в плоскости $z=1$. Поэтому для рассматриваемой поверхности линией уровня, соответствующей уровню $z=1$ (аппликате $z=1$), является окружность (рис. 104).

Ясно, что проекция линии уровня на плоскость xOy есть та же самая линия, только перенесенная параллельно самой себе в плоскость xOy. Ее также называют линией уровня. В некоторых случаях линии уровня называют горизонталями, Часто прибегают к следующему приему изображения поверхностей: берут совокупность плоскостей, параллельных плоскости xOy и отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние. Находят пересечение каждой плоскости с поверхностью, т. е. линии уровня, изображают полученные линии на плоскости xOy и таким образом получают карту поверхности (вернее, план поверхности). На этом плане по расположению горизонталей можно судить о рельефе поверхности.

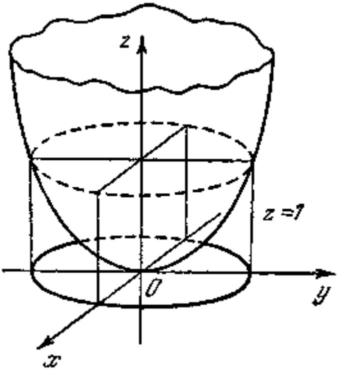

Рис. 104.

На рисунке 105 изображены три поверхности и под каждой из них нарисован ее план. Хотя число горизонталей (линий уровня) одно и то же для всех трех поверхностей, но расположение горизонталей различное. Можно заметить, что

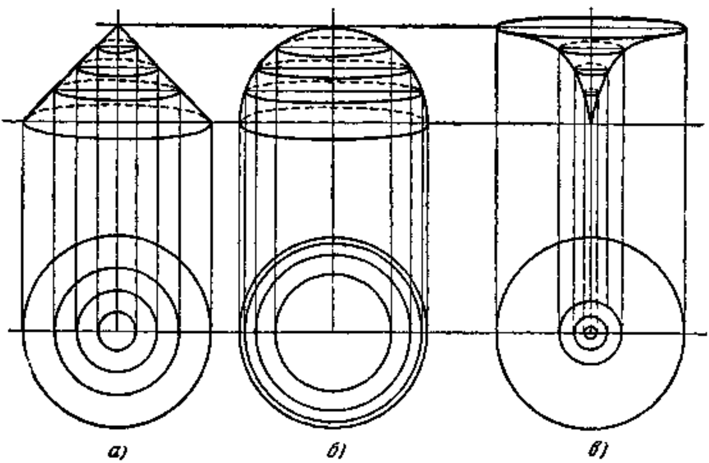

Рис. 105.

там, где поверхность круче, горизонтали расположены ближе друг к другу, или, как говорят, горизонтали расположены гуще.

§ 6. Частные производные

В главе VIII было показано, как с помощью производной исследовать функцию. Для исследования функций многих переменных вводится понятие частной производной.

Определение. *Частной производной от функции $W=F(x, y, z)$ по переменному x называется производная, вычисленная в предположении, что все независимые переменные, кроме x, сохраняют постоянное значение.*

Частная производная по x обозначается $\frac{\partial W}{\partial x}$, или $\frac{\partial F}{\partial x}$, или $F'_x(x, y, z)$. Аналогично определяют и частные производные по другим независимым переменным: $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, F'_y обозначают частную производную по y; $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$, F'_z—частную производную по z.

Пример 1. Вычислим частные производные по всем независимым переменным от функции $z=x^2+xy^2$.

Будем считать сначала x переменным, а y постоянным. Тогда, используя правила вычисления производных (см. гл. VII, § 4), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^2.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2xy.$$

Пример 2. Найдем частные производные функции $W=x\sin(y^2+z)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\sin(y^2+z),\quad \frac{\partial W}{\partial y}=2xy\cos(y^2+z),\quad \frac{\partial W}{\partial z}=x\cos(y^2+z).$$

Определение. *Частным приращением функции $z=F(x, y)$ по x называется приращение функции, вычисленное в предположении, что все независимые переменные, кроме x, сохраняют постоянные значения.* Например, если дана функция $z=x^2+y$, то ее частное приращение по x найдем так: дадим x приращение $h=\Delta x$, оставляя без изменения другое переменное y, получим $z+\Delta z=(x+\Delta x)^2+y$; вычитая первоначальное значение функции, будем иметь

$$\Delta z=[(x+\Delta x)^2+y]-[x^2+y]=2x\,\Delta x+\Delta x^2.$$

Это и есть частное приращение по x. Аналогично определяются и другие частные приращения.

Из определения частной производной вытекает (см. определение производной в гл. VII, § 3), что частная производная по x есть предел отношения частного приращения функции по x к приращению Δx при условии, что приращение Δx стремится к нулю, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,\ y)-F(x,\ y)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Выясним геометрический смысл частной производной для функции двух независимых переменных (рис. 106).

На рисунке 106 изображена поверхность, заданная уравнением $z=F(x,\ y)$. На поверхности отмечена точка M, и через нее проведена плоскость Π_1, параллельная координатной плоскости xOz. Все точки, лежащие в плоскости Π_1, имеют одну и ту же ординату, т. е. в ней y постоянен. В сечении поверхности плоскостью Π_1 получается кривая линия, которую обозначим буквой L. Формула (*) для этой кривой определяет тангенс угла, образованного касательной и прямой AB. Иначе можно сказать, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть тангенс угла между плоскостью xOy и касательной, проведенной к кривой L.

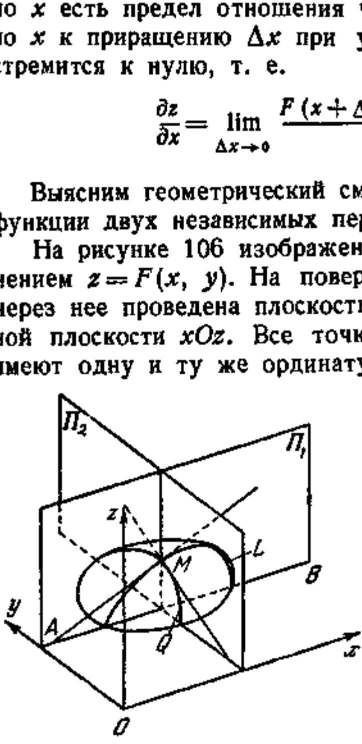

Рис. 106.

Также, если проведем через точку M плоскость Π_2, параллельную плоскости yOz, то получим кривую Q, лежащую в плоскости Π_2. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ будет давать тангенс угла между плоскостью xOy и касательной, проведенной к кривой Q.

Покажем применение частных производных. Для этого предварительно дадим некоторые определения.

Значение функции $z=F(x, y)$ при $x=a$ и $y=b$, т. е. $z=F(a, b)$, называется максимальным, если оно больше всех значений функции при x и y, мало отличающихся соответственно от a и b.

Иначе говоря, можно найти кусок плоскости xOy, содержащий точку (a, b) внутри себя и такой, что в любой его внутренней точке, кроме (a, b), функция будет иметь значение, меньше чем $F(a, b)$.

Минимальное значение функции определяется сходным образом:

Значение функции называется минимальным при $x=a$, $y=b$, если оно меньше всех ее значений при x и y, мало отличающихся соответственно от a и b.

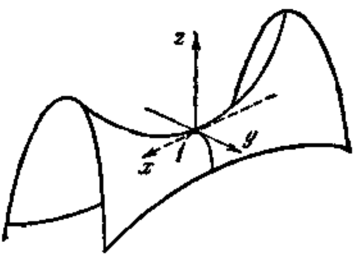

Рис. 107.

Например, функция $z=x^2+y^2$ имеет минимум, равный 0, так как при $x=0$ и $y=0$ функция равна 0, а при любых других значениях x и y она положительна, т. е. больше нуля (ср. гл. VIII, § 3).

Геометрически ясно, что максимальное значение функции определяет точку, находящуюся выше соседних, минимальное же значение определяет точку, находящуюся ниже соседних.

Если употребить географические термины, то максимальные значения функции определяют горные вершины, а минимальные — низины.

Также геометрически ясно, что касательная в вершине, проведенная к любой кривой, лежащей на поверхности и проходящей через вершину, параллельна плоскости xOy. Значит, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в вершине (и в низине) равны нулю (ср. гл. VIII, § 3).

Однако может случиться, что частные производные равны нулю в некоторой точке, но в ней нет ни максимума, ни минимума. Такие точки называются седловинами. Например, поверхность, изображенная на рис. 107, в начале координат имеет седловину. В самом деле, в сечении с плоскостью xOz получается кривая, имеющая в начале координат минимум, а в сечении с плоскостью yOz получается кривая, имеющая в начале координат максимум. Обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны нулю, но для поверхности нет ни максимума, ни минимума.

Когда мы уверены в существовании максимума или минимума, то их можно найти при помощи частных производных.

Пример 3. Найти точку параболоида $z=x^2+y^2$, наиболее близкую к точке $M\left(16,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$.

Прежде всего посмотрим, не лежит ли точка M на параболоиде. Если лежит, то она и будет искомой. Если же нет, то расстояние от точки M до любой точки параболоида всегда будет больше нуля.

Подставим координаты $x=16$, $y=0$, $z=\frac{1}{2}$ в уравнение параболоида, получим $\frac{1}{2}\neq 16^2+0^2$. Значит, точка M не лежит на параболоиде. Рассмотрим теперь произвольную точку параболоида, для нее x и y произвольны, а z находится из уравнения $z=x^2+y^2$. Следовательно, координаты произвольной точки P параболоида будут (x, y, x^2+y^2). Напишем формулу, выражающую расстояние между точками M и P (см. формулу (*) из § 2 этой главы):

$$MP=\sqrt{(x-16)^2+(y-0)^2+\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Это расстояние (эта функция), как мы только что убедились, никогда не равно нулю, но оно может быть сколь угодно большим. Если частные производные обращаются в какой-то одной точке в нуль, то в этой точке возможно существование минимума. Если расстояние минимальное, то и его квадрат также будет иметь минимальное значение. Поэтому вместо расстояния MP будем рассматривать его квадрат, который обозначим буквой W. Таким образом, получилась следующая задача: найти минимум функции

$$W=(x-16)^2+y^2+\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2(x-16)+2\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)2x,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=2y+2\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)2y.$$

Приравниваем их нулю:

$$2(x-16)+2\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)2x=0,$$

$$2y+2\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)2y=0.$$

Решим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} -16+2x^3+2xy^2=0, \\ y(x^2+y^2)=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения или $y=0$, или $x^2+y^2=0$. Если $y=0$, то из первого уравнения получаем, что $2x^3-16=0$, откуда $x=2$. Если же $x^2+y^2=0$, то $x=0$ и $y=0$; подставляя в первое уравнение, получаем $-16=0$, т. е. эти значения ему не удовлетворяют. Таким образом, решением системы являются только $x=2$, $y=0$.

Следовательно, точка параболоида, ближайшая к точке $M\left(16,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$, найдена, это $P(2,\ 0,\ 4)$.

Упражнения к главе XIV

1. Найти расстояние между точками $P(-3, 4, 0)$ и $Q(-5, 0, -2)$.

2. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости yOz и отстоящей от нее на три единицы.

3. Изобразить на рисунке плоскость, уравнение которой

$$2x+3y+2z=12.$$

4. Исследовать при помощи сечений поверхность

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1.$$

5. Найти несколько линий уровня поверхности $z=\sin(x^2+y^2)$.

6. Найти указанные частные производные для следующих функций:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = x^3 y + 1$; б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = y \sin x$;

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = e^{\sin(xy)}$; г) $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, если $z = t^x$;

д) z'_u, если $z = ux + u^2$; е) z'_u, если $z = \sin^2 xu$;

ж) $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}$, если $w = zx^2 \ln y$.

7. Найти точку, лежащую на плоскости $x + y + z = 1$ и наиболее близкую к началу координат.

8. Лежит ли точка $(1, 2, 1)$ на пересечении плоскостей

$$x + 2y - 5z = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 3y + 3z = 11?$$

ГЛАВА XV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Семейство функций

Рассмотрим уравнение

$$y = C(x^2+1), \tag{1}$$

в котором C обозначает любое действительное число, или, как говорят, *параметр*. Если придадим C определенное значение, например $C=1$, то получим уравнение $y=x^2+1$, которое имеет своим графиком параболу, изображенную на рис. 108. Если положить $C=\frac{1}{4}$, то получим новую параболу, уравнение которой будет $y=\frac{1}{4}(x^2+1)$. При $C=0$ будем иметь $y=0$, т. е. ось Ox. Таким образом, уравнение (1) определяет не одну функцию, а, как говорят, семейство функций, зависящее от одной произвольной постоянной (или параметра). Поскольку каждая функция имеет своим графиком некоторую кривую, то уравнение (1) определяет семейство кривых. На рис. 108 изображены кривые, принадлежащие семейству и соответствующие $C=\pm 1$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, 0.

Теперь найдем производную от функции (1)

$$y' = 2Cx \tag{2}$$

и рассмотрим систему уравнений (1) и (2). Исключим из них произвольное постоянное (параметр) C. Решая уравнение (2) относительно C и подставляя полученное выражение в уравнение (1), получим: $C=\frac{y'}{2x}$, $y=\frac{y'}{2x}(x^2+1)$, или

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1}. \tag{3}$$

Это уравнение связывает x, y и y' для любой кривой семейства, определенного уравнением (1).

Уравнение (3) называют *дифференциальным уравнением* семейства кривых (1). Этому уравнению удовлетворяет любая функция семейства (1). Это надо понимать так: если возьмем уравнение любой функции из семейства (1), найдем производную и подставим в уравнение (3), то получим тождество

$$y' = 2Cx,\ 2Cx = \frac{2xC(x^2+1)}{x^2+1}.$$

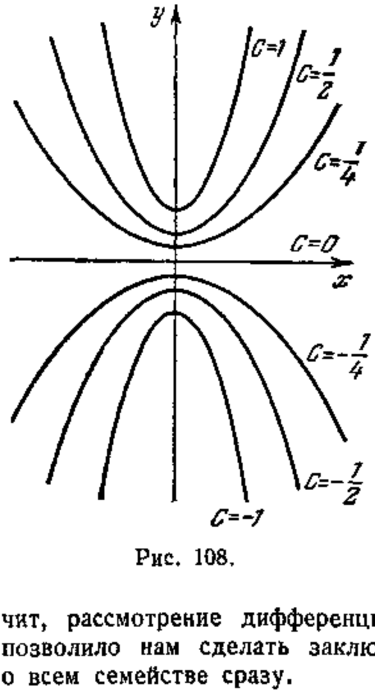

Рис. 108.

Рассматривая дифференциальное уравнение (3), можно найти некоторые свойства всех кривых семейства (1). Например, в первой четверти x и y положительны; поэтому выражение $\frac{2xy}{x^2+1}$ в первой четверти всегда больше нуля и, следовательно, производная всегда положительна. Отсюда можно заключить, что все функции рассматриваемого семейства в первой четверти возрастают. Значит, рассмотрение дифференциального уравнения семейства позволило нам сделать заключение не об одной кривой, а о всем семействе сразу.

Теперь рассмотрим уравнение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, или параметры. Если взять, например, значения $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, тогда получим $y = \cos x$. Эта кривая изображена на рис. 109. Если $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, то получаем $y = \sin x$. Эта кривая также изображена на рис. 109.

Вообще, для каждой пары значений C_1 и C_2 получается определенная кривая (на рис. 109 изображены кривые, соответствующие $C_1=1$ и $C_2=0$; $C_1=0$ и $C_2=1$; $C_1=1$ и $C_2=1$). Будем говорить, что уравнение (4) определяет семейство функций, зависящее от двух произвольных постоянных (или двух параметров), а так как каждой функции

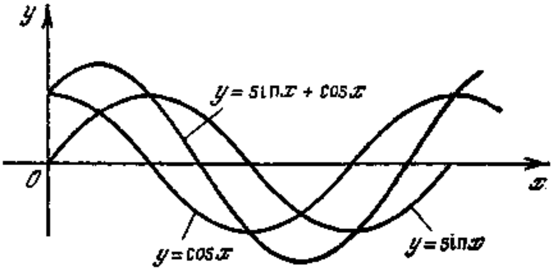

Рис. 109.

соответствует кривая, то будем также говорить, что уравнение (4) определяет семейство кривых. Найдем первую и вторую производные от функции, определяемой уравнением (4):

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x, \tag{5}$$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x. \tag{6}$$

Исключим из уравнений (4), (5) и (6) параметры C_1 и C_2 [в этом примере C_1 и C_2 проще всего исключаются при помощи сложения уравнений (4) и (6)]. После исключения будем иметь

$$y'' + y = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) является дифференциальным уравнением семейства (4). Из уравнения (7) находим, что $y'' = -y$; отсюда видно, что в первой и второй четвертях, т. е. при $y > 0$, вторая производная отрицательна. А если $y'' < 0$, то (см. гл. VIII) кривая выпукла. Таким образом, опять из рассмотрения дифференциального уравнения мы выяснили, что в с е кривые семейства, если они расположены над осью Ox, выпуклы, а если ниже оси Ox, вогнуты.

Приведенные примеры показывают связь между дифференциальными уравнениями и семействами кривых.

§ 2. Основные определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое входят: независимое переменное, неизвестная функция и производные от этой неизвестной функции. При этом в уравнение обязательно должны входить производные, а независимое переменное и сама искомая функция явно могут не входить. Например,

$$xy'' + yy' + 3 = 0, \quad y'' + y' = 0, \quad y' + x = 0,$$
$$y' + y^2 = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = xy$$

являются дифференциальными уравнениями, хотя второе и третье уравнения не содержат явно неизвестной функции, а в четвертое не входит независимое переменное.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y' + x^2y = x^2 + 1, \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$
$$y' = f(xy), \quad -\frac{dy}{dx} = xy.$$

Примерами дифференциальных уравнений второго порядка могут служить следующие:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y'' = xy', \quad y'' + yy' = 0,$$
$$y'' = f(x, y, y'), \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

Уравнение $xy''' + yy' = 0$ есть дифференциальное уравнение третьего порядка. Уравнение $y^{\mathrm{V}} + y = 0$ — пятого порядка. Примером дифференциального уравнения порядка n может служить уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Решить, или проинтегрировать, дифференциальное уравнение — это значит найти такую функцию, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение, обращает его в тождество. Такая функция называется решением дифференциального уравнения.

Например, функция $y=x^2$ является решением дифференциального уравнения $xy''-y'=0$. Действительно, $y'=2x$, $y''=2$; подставляя y', y'' в уравнение $xy''-y'=0$, получаем $2x-2x\equiv 0$, т. е. тождество.

Если решение дифференциального уравнения содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, то такое решение называется общим решением дифференциального уравнения.

Поясним, что называют независимыми произвольными постоянными:

Постоянные, входящие в решение, называются независимыми, если они входят в решение так, что нельзя заменить никакую комбинацию двух или нескольких из них при помощи введения нового постоянного и тем самым уменьшить число постоянных.

Например, если имеем $y=C_1x^2+C_2x+C_3x$, то сюда входят три постоянных C_1, C_2 и C_3. Однако можно заданное уравнение переписать в виде $y=C_1x^2+(C_2+C_3)x$. Если теперь обозначим C_2+C_3 через C, то последнее уравнение перепишется так: $y=C_1x^2+C$. В этом уравнении постоянных только два C_1 и C. Таким образом, в первоначальном уравнении постоянные C_1, C_2 и C_3 не были независимыми. Также, если рассмотрим уравнение $y=C_1\sin^2 x+$ $+C_2\cos^2 x+C_3$, то его можно переписать в виде $y=C_1\sin^2 x+C_2(1-\sin^2 x)+C_3=(C_1-C_2)\sin^2 x+(C_2+C_3)$; обозначив C_1-C_2 через C_4, а C_2+C_3 через C_5, получим

$$y=C_4\sin^2 x+C_5.$$

Следовательно, в уравнении $y=C_1\sin^2 x+C_2\cos^2 x+C_3$ постоянные C_1, C_2 и C_3 не являются независимыми.

Пример 1. $y''+y=0$ имеет общее решение

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Решение, которое получается из общего при определенных значениях произвольных постоянных, называется частным решением. Например, если положить в предыдущем примере $C_1=0$ и $C_2=1$, то получим $y=\sin x$, это частное решение.

Геометрический смысл общего решения: *общее решение дифференциального уравнения является семейством кривых, зависящим от произвольных постоянных в числе,* *равном порядку дифференциального уравнения.* Частное решение имеет своим графиком какую-нибудь из кривых, входящих в указанное семейство. Эти кривые называются *интегральными кривыми.*

Часто встречается задача, в которой нужно определить частное решение по начальным данным, или начальным условиям. Эта задача состоит в следующем:

Дано дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$; требуется найти решение $y=\varphi(x)$, которое при $x=a$ принимало бы значение $\varphi(a)=b$, или, что то же, найти решение, график которого проходил бы через заданную точку (a, b). Координаты этой точки и являются *начальными данными*, или *начальными условиями.* Например, дано уравнение $y'=\frac{y}{x}$; его общим решением является $y=Cx$ (так как $y'=C$, то при подстановке в уравнение получаем тождество). Надо выделить из общего решения частное, принимающее значение $y=6$ при $x=2$ (это начальные данные). Полагая в уравнении $y=Cx$ $x=2$, а $y=6$, получаем $6=C\cdot 2$, из этого уравнения определяем C. Находим, что $C=3$. Таким образом, $y=3x$ является искомым частным решением.

Дифференциальные уравнения возникают часто при решении геометрических и физических задач, так как установить соотношение между дифференциалами (или производными) обычно легче, чем между самими величинами. Это объясняется тем, что, пользуясь дифференциалами, можно допускать ошибки, являющиеся бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с приращением независимого переменного, как мы это видели в гл. IX и XII и увидим в пр. 4 следующего параграфа.

§ 3. Дифференциальные уравнения первого порядка

Из всех дифференциальных уравнений первого порядка мы рассмотрим только один тип, именно *уравнения с разделяющимися переменными.* Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(y)}. \tag{1}$$

Чтобы проинтегрировать, или, что то же, решить это уравнение, переписывают его в таком виде:

$$\varphi_2(y)\,dy=\varphi_1(x)\,dx. \qquad (2)$$

После этого ищут неопределенные интегралы от левой и правой частей уравнения (2) и приравнивают результаты. Произвольные постоянные, которые при этом получаются, обычно переносят в одну из частей равенства и их разность обозначают одной буквой. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$. Разделяя переменные, перепишем его так: $y\,dy=x\,dx$. Интегрируя правую и левую части уравнения, получаем

$$\frac{y^2}{2}+C_1=\frac{x^2}{2}+C_2.$$

Обозначая $C_2-C_1=\frac{C}{2}$, найдем $y^2=x^2+C$, откуда

$$y=\pm\sqrt{x^2+C}.$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ (*). Заменим производную отношением дифференциалов $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ и разделим переменные:

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}.$$

Проинтегрируем левую часть по y, правую по x и приравняем результаты:

$$\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg} x+C.$$

Это равенство и дает общее решение.

Интересно отметить, что общие решения могут иметь различный вид, поэтому сразу не скажешь, что они дают одну и ту же связь между x и y. Например, возьмем только что полученное общее решение и положим $C=\operatorname{arctg} C_1$, тогда

$$\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} C_1.$$

Теперь возьмем тангенсы от левой и правой частей

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} y = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C_1).$$

Заметив, что $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} y = y$, и применив формулу тангенса суммы, получим

$$y = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} C_1}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} \operatorname{arctg} C_1},$$

или

$$y = \frac{x + C_1}{1 - Cx}.$$

Последнее равенство также дает общее решение уравнения (*).

Пример 3. Закон охлаждения тела в воздухе формулируется следующим образом:

Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха, т. е.

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0), \tag{3}$$

где t — время, u — температура тела, u_0 — температура воздуха, которая во время опыта считается неизменной, k — коэффициент пропорциональности.

Тело в начале опыта имело температуру 100° С. Через 20 минут его температура стала 60° С. Узнать, через сколько минут температура тела станет равной 30° С, если известно, что температура воздуха во время опыта оставалась равной 20° С.

В нашей задаче $u_0 = 20$, поэтому сформулированный закон запишется

$$\frac{du}{dt} = k(u - 20). \tag{4}$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Перепишем его, разделив переменные:

$$\frac{du}{u - 20} = k\, dt.$$

Интегрируя левую и правую части, будем иметь

$$\ln (u - 20) = kt + C$$

или, потенцируя,

$$u-20=e^{C}e^{kt}. \tag{5}$$

Используем начальные условия: подставим в равенство (5) $t=0$ и $u=100$, получим $100-20=e^{C}e^{k\cdot 0}$. Отсюда $e^{C}=80$, и уравнение (5) принимает вид

$$u=20+80e^{kt}. \tag{6}$$

Полученное уравнение еще не позволяет вычислить искомое время, так как в нем содержится неизвестный коэффициент k. Для его определения используем результаты наблюдения, т. е. что при $t=20$ температура $u=60$. Подставляя эти данные в уравнение (6), получим $60=20+80e^{k\cdot 20}$; $40=80\,(e^{k})^{20}$; $(e^{k})^{20}=\frac{1}{2}$, откуда $e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$; следовательно, уравнение (6) можно записать в виде

$$u=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}. \tag{7}$$

Теперь можно получить ответ на поставленный в задаче вопрос: положим в (7) $u=30$, тогда $30=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Решая это уравнение, находим $10=80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; $\frac{t}{20}=3$; $t=60$. Таким образом, тело за 60 минут охладится до 30° С.

Пример 4. Истечение жидкости из сосуда. Если жидкость вытекает из сосуда через малое отверстие в дне сосуда, то скорость v истечения в данный момент определяется формулой $v=\gamma\sqrt{2gh}$. Здесь h — расстояние свободной поверхности жидкости от отверстия, $g=9{,}8$ *м/сек*² — ускорение силы тяжести и γ — коэффициент, определяемый опытным путем и зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия. Например, если жидкость — вода, а отверстие — круг радиуса 0,1, то коэффициент $\gamma=0{,}6$. Значит, в этом случае формула будет выглядеть так:

$$v=0{,}6\sqrt{19{,}6h}. \tag{*}$$

Пользуясь приведенной формулой, решим задачу.

Задача 1. Вычислить время T, за которое вода вытечет из сосуда, имеющего форму полушара радиуса $R=1$ *м*, если известно, что в начальный момент вода заполняла весь сосуд. Отверстие, через которое вытекает вода, является кругом радиуса 0,1 *м* (рис. 110, *а*).

Решение. Выберем оси координат так, как показано на рис. 110, *а*, и рассмотрим промежуточный момент времени t $(0<t<T)$. В этот момент вода уже не будет занимать всего сосуда и ее поверхность будет находиться на

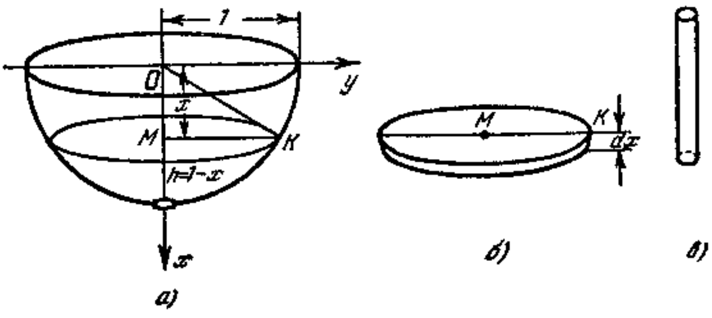

Рис. 110.

расстоянии x от начала координат. Расстояние свободной поверхности воды от отверстия будет равно $h=1-x$, скорость истечения $v=0{,}6\sqrt{19{,}6(1-x)}$.

Рассмотрим, что произойдет с водой за малый промежуток времени dt, протекший с момента t. За этот промежуток времени уровень воды понизится на dx. С другой стороны, за этот же промежуток времени вода вытечет через отверстие в виде цилиндрической струйки. На чертеже изображены вытекший слой высоты dx (рис. 110, *б*) и струйка (рис. 110, *в*). Объем слоя и струйки равны между собой.

Подсчитаем каждый из этих объемов. Подсчеты будем вести так же, как в гл. XII, с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Так как dt мало, то можно считать, что скорость истечения за промежуток времени dt остается неизменной, такой же, какой она была в момент времени t. Значит, будем считать, что скорость истечения в указанном промежутке времени равна $0{,}6\sqrt{19{,}6(1-x)}$.

Поэтому длина струйки (высота цилиндра) равна скорости, умноженной на время, т. е. $0{,}6\sqrt{19{,}6(1-x)}\,dt$. Объем струйки получим, умножив ее длину (высоту цилиндра) на площадь отверстия (площадь основания цилиндра), которая равна $\pi\cdot 0{,}1^2=0{,}01\pi$. Таким образом, объем струйки равен $0{,}01\cdot 0{,}6\pi\sqrt{19{,}6(1-x)}\,dt$. Теперь подсчитаем объем слоя как объем цилиндра (см. гл. XII, § 1), высота которого равна dx, а радиус основания MK. Выразим MK через x из прямоугольного треугольника OMK. Применяя теорему Пифагора, получим $MK^2=1-x^2$. Поэтому площадь круга равна $\pi\cdot MK^2=\pi(1-x^2)$, а объем слоя

$$\pi(1-x^2)\,dx.$$

Приравнивая объем струйки объему слоя, получим

$$0{,}01\cdot 0{,}6\pi\sqrt{19{,}6(1-x)}\,dt=\pi(1-x^2)\,dx. \qquad (**)$$

Это — дифференциальное уравнение, связывающее расстояние свободной поверхности воды от начала координат, время истечения и их дифференциалы. Уравнение (**) можно переписать в виде

$$dt=\frac{(1-x^2)\,dx}{0{,}006\sqrt{19{,}6(1-x)}}.$$

Здесь переменные разделены, т. е. левая часть зависит только от t, а правая — только от x. Интегрируя, получим

$$t=\frac{1000}{6\sqrt{19{,}6}}\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части, сделаем замену переменного, положив $1-x=z$. Отсюда $x=1-z$, $dx=-dz$, и интеграл перепишется в следующем виде:

$$\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx=-\int\frac{2z-z^2}{\sqrt{z}}\,dz.$$

Делая последовательные преобразования и интегрируя, получаем

$$-\int\frac{2z-z^2}{\sqrt{z}}\,dz=\int\frac{z^2-2z}{\sqrt{z}}\,dz=\int(z^{3/2}-2z^{1/2})\,dz=$$
$$=\frac{2}{5}z^{5/2}-2\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}+C_1=\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{4}{3}(1-x)^{3/2}+C_1.$$

Следовательно,

$$t=\frac{1000}{6\sqrt{19,6}}\left[\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\right]+C. \qquad (***)$$

Это уравнение, хотя и дает связь между величинами t и x, но для расчетов им воспользоваться нельзя, так как в него еще входит произвольное постоянное C, величина которого неизвестна.

Однако вспомним, что нами не было использовано условие, что в начальный момент времени $t=0$ вода занимала весь сосуд, т. е. ее поверхность проходила через начало координат. Значит, при $t=0$ величина x равнялась нулю. Подставляя $t=0$ и $x=0$ в уравнение (***), получим

$$0=\frac{1000}{6\sqrt{19,6}}\left[\frac{2}{5}-\frac{4}{3}\right]+C,$$

откуда

$$C=\frac{14}{15}\cdot\frac{1000}{6\sqrt{19,6}}\approx 35,2.$$

Найденное значение C подставляем в (***):

$$t=\frac{1000}{6\sqrt{19,6}}\left[\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}-\frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\right]+35,2. \qquad (****)$$

Итак, мы получили связь между x и t. Так как в момент, когда вся вода вытечет, $x=1$, то время истечения воды из сосуда найдем, подставляя $x=1$ в уравнение (****); получим, что $T=35,2$ *сек.*

§ 4. Некоторые дифференциальные уравнения, встречающиеся в механике

Если точка движется по оси Ox под влиянием силы F и если t обозначает время, а x — расстояние от начала координат, то скорость v точки определяется первой производной $v=\frac{dx}{dt}$, а ускорение a — второй производной, т. е. $a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$. Связь между силой, массой точки и ее ускорением устанавливается законом Ньютона: действующая сила равна произведению массы на ускорение, т. е.

$$F = ma, \tag{1}$$

или

$$F = m\frac{dv}{dt}, \tag{2}$$

или

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3}$$

Приведем примеры дифференциальных уравнений, полученных при помощи этого закона.

Пример 1. Точка движется под действием силы, пропорциональной скорости точки и направленной против движения. В начальный момент точка находилась в начале координат и скорость точки была равна v_0. Найти закон движения, т. е. связь между расстоянием точки от начала координат и временем.

В этом примере величина силы F равна kv, а так как сила направлена против движения, то

$$F = -kv.$$

Применяя закон в форме (2), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt.$$

Интегрируем левую и правую части и приравниваем результаты:

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1.$$

Для удобства записи положим $C_1 = \ln C$:

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln C;$$

потенцируя, имеем

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}. \tag{4}$$

Это — общее решение задачи.

Так как в начальный момент $t=0$ скорость равнялась v_0, то, подставляя $t=0$ и $v=v_0$ в уравнение (4), найдем значение C:

$$v_0 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}, \quad C = v_0;$$

следовательно, уравнение (4) примет вид

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{5}$$

Это — частное решение. Однако задача еще не решена, так как зависимость x от t не найдена. В силу того, что $v = \frac{dx}{dt}$, уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{6}$$

Это тоже дифференциальное уравнение первого порядка. Разделяем переменные:

$$dx = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\, dt. \tag{7}$$

Интегрируем отдельно левую и правую части и, приравнивая результаты, получаем

$$x = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2. \tag{8}$$

Так как в начальный момент времени точка находилась в начале координат, то, подставляя в (8) значения $t=0$ и $x=0$, имеем $0 = -\frac{mv_0}{k}e^0 + C_2$. Отсюда $C_2 = \frac{mv_0}{k}$. При этом значении C_2 из общего решения (8) получаем частное

$$x = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mv_0}{k}, \tag{9}$$

или

$$x = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Это и есть решение задачи.

Приведем конкретный пример, сводящийся к предыдущей задаче.

Пример 2. Моторная лодка, вес которой 245 *кГ*, идет прямолинейно и равномерно со скоростью 10 *м/сек*. В некоторый момент, который будем считать начальным, двигатель выключается и движение лодки замедляется за счет трения о воду. Через одну секунду после выключения двигателя лодка имела скорость 8 *м/сек*. Нужно найти скорость лодки через 5 *сек* и расстояние, пройденное за это время.

Примечание. Сила трения лодки о воду пропорциональна скорости и направлена против движения. Коэффициент пропорциональности находится из опыта.

Применяя обозначения предыдущей задачи, имеем $v_0 = 10$ *м/сек*. Так как вес лодки 245 *кГ*, то ее масса равна $\frac{245}{g}$, а считая, что $g = 9,8$ *м/сек*^{2}, получим 25. Подставляя эти данные в равенство (5), находим

$$v = 10e^{-\frac{kt}{25}}. \tag{5'}$$

Эта формула еще непригодна для вычислений, так как в ней k неизвестно. Но мы еще не использовали то, что через 1 *сек* скорость лодки была 8 *м/сек*. Подставив эти данные, полученные из наблюдений, в равенство (5′), мы сможем найти k. Сделаем это:

$$8 = 10e^{-\frac{k}{25}},$$

откуда

$$e^{-\frac{k}{25}} = 0,8.$$

Логарифмируя обе части этого выражения, найдем $-\frac{k}{25} = \ln 0,8$, откуда

$$k = -25 \ln 0,8.$$

Итак, коэффициент пропорциональности k найден. После этого равенство (5′) примет вид

$$v = 10e^{t \ln 0,8} = 10(e^{\ln 0,8})^t = 10(0,8)^t.$$

Отсюда можно определить искомую скорость, подставляя $t=5$ *сек*:

$$v=10(0{,}8)^5=10\frac{8^5}{10^5}\approx 3{,}3\ \textit{м/сек}.$$

Подставляя найденное значение k и данные значения m, v_0 и $t=5$ в равенство (9), найдем путь, пройденный за пять секунд:

$$x=-\frac{10}{\ln 0{,}8}(1-0{,}8^5)\approx 10\ \textit{м}.$$

Пример 3. Рассмотрим движение точки под влиянием силы $F=-kx$. Возьмем закон Ньютона в форме (3), тогда

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx,\ \text{или}\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0. \tag{10}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Проверим что выражение

$$x=C_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \tag{11}$$

является его общим решением. Для этого найдем

$$\frac{dx}{dt}=C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-C_1\frac{k}{m}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-C_2\frac{k}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Подставляя вторую производную и саму функцию в уравнение, получим

$$-C_1\frac{k}{m}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-C_2\frac{k}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\\ +\frac{k}{m}\left[C_1\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right]\equiv 0.$$

Таким образом, функция (11), подставленная в уравнение (10), обращает его в тождество. Значит, функция (11) является решением уравнения (10). Поскольку эта функция содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 (ведь это любые числа), то она является общим решением уравнения (10).

Общее решение можно записать и в другом виде, а именно:

$$x=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right].$$

Положим

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\varphi,\quad \sqrt{C_1^2+C_2^2}=A,$$

тогда

$$x=A\left[\cos\varphi\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\sin\varphi\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right],$$

или

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\varphi\right). \tag{12}$$

Коэффициент A называется амплитудой, $\sqrt{\frac{k}{m}}$ — частотой, φ — фазой. Вспомнив гл. IV, § 1, видим, что любым решением уравнения (10) является синусоида, т. е. колебательное движение. Уравнение (10) называется уравнением гармонических колебаний.

§ 5. Движение точки на плоскости. Система дифференциальных уравнений

Пусть точка P с массой m движется на плоскости под влиянием силы **F**, которая меняется и по величине и по направлению. Для изучения этого движения точку P проектируют на оси координат и рассматривают движения этих проекций по осям. Таким образом, вопрос движения точки на плоскости сводится к рассмотрению двух движений по осям координат.

Обозначим угол, образуемый силой **F** с положительным направлением оси Ox, через α (этот угол является переменной величиной). Тогда проекция силы **F** на ось Ox (обозначим ее X) будет

$$X=F\cos\alpha,$$

а проекция силы F на ось Oy (обозначим ее Y) будет

$$Y=F\sin\alpha.$$

Проекции скорости $\mathbf{v}$ на оси Ox и Oy обозначим соответственно v_x и v_y, а проекции точки P на оси Ox и Oy — P_x и P_y. Имеем $P_x(x, 0)$, $P_y(0, y)$.

В соответствии с § 4 можно записать:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \tag{1}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2$_1$}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \tag{2$_2$}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = X, \tag{3$_1$}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = Y, \tag{3$_2$}$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = F\cos\alpha, \tag{4$_1$}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y = F\sin\alpha. \tag{4$_2$}$$

Таким образом, движение точки на плоскости определяется двумя дифференциальными уравнениями (4_1) и (4_2). Иногда удобнее пользоваться уравнениями (3_1) и (3_2). Уравнения (4_1) и (4_2) называются системой дифференциальных уравнений движения точки на плоскости.

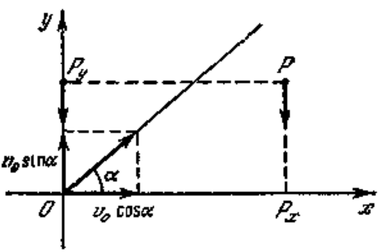

Рис. 111.

Пример 1. Рассмотрим движение материальной точки P под влиянием силы тяжести $\mathbf{F}$ в безвоздушном пространстве, если известно, что точка брошена под углом α к горизонту из начала координат с начальной скоростью v_0.

Выберем оси координат так, чтобы ось Ox была горизонтальной (рис. 111).

Во время движения на точку P действует только сила тяжести $\mathbf{F}$, равная mg, где m — масса точки, а g — ускорение силы тяжести. Сила тяжести направлена в отрицательном направлении оси Oy. Никакие другие силы на точку не действуют.

Проекция силы $\mathbf{F}$ на ось Ox равна нулю, а на ось Oy — равна $(-mg)$. Поэтому уравнения (4_1) и (4_2) для нашего случая напишутся так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg.$$

Это — система двух дифференциальных уравнений второго порядка. Однако удобнее воспользоваться уравнениями $(3)_1$ и (3_2), т. е. системой дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система для рассматриваемой задачи такова:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0, \tag{5_1}$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg. \tag{5_2}$$

Из уравнения (5_1) имеем: $\frac{dv_x}{dt}=0$; значит, v_x все время сохраняет постоянное значение, а так как в начальный момент времени $v_x=v_0\cos\alpha$, то и всегда

$$v_x=v_0\cos\alpha. \tag{6}$$

Но $v_x=\frac{dx}{dt}$, поэтому уравнение (6) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha \text{ или } dx=v_0\cos\alpha\,dt. \tag{7}$$

Интегрируя, находим

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t+C_1. \tag{8}$$

Известно, что при $t=0$ абсцисса равна нулю, т. е. $x=0$. Подставляя эти значения в равенство (8), находим

$$0=v_0\cos\alpha\cdot 0+C_1, \quad C_1=0.$$

Уравнение (8) получает вид

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t. \tag{9}$$

Из уравнения (5_2) находим:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g,$$

или

$$dv_y = -g\,dt.$$

Интегрируя, получаем, что

$$v_y = -gt + C_2. \tag{10}$$

Так как при $t=0$ $v_y = v_0 \sin\alpha$, то из (10)

$$v_0 \sin\alpha = -g\cdot 0 + C_2, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$v_y = -gt + v_0 \sin\alpha$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Интегрируя, наконец, последнее уравнение, получим, что

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\cdot t + C_3. \tag{11}$$

Так как при $t=0$ ордината тоже равна нулю, то, подставляя значения $t=0$ и $y=0$ в (11), находим, что $C_3 = 0$. После этого уравнение (11) уже принимает окончательный вид:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t. \tag{12}$$

Уравнения (9) и (12) определяют движение точки, брошенной под углом к горизонту, под действием силы тяжести. Эти уравнения были уже получены из других соображений в гл. III.

Упражнения к гл. XV

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ и изобразить несколько интегральных кривых.

2. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x}$, проходящее через точку (3, 4).

3. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{x}{y}$, проходящее через точку (4, 0).

4. Найти общее решение уравнения $y' = \frac{ax+b}{cx+d}$ и, придав какие-либо числовые значения величинам a, b, c, d, изобразить несколько кривых полученного семейства.

5. Найти общее решение уравнения $y' = \frac{(x+1)\,y}{(y-1)\,x}$.

6. Найти общее решение уравнения $y' = y\,(x^2+1)$.

7. Найти общее решение уравнения $\operatorname{tg} y\,dy = \operatorname{ctg} x\,dx$.

8. Найти общее решение уравнения $(1+y^2)\,dy = y\,dx$.

ОТВЕТЫ

К главе I

1. 17. 2. 1) Положителен; 2) отрицателен; 3) положителен. 3. 0. 4. $\sqrt{73}$. 5. $\sqrt{41}$. 6. $\left(\frac{17}{5}, \frac{22}{5}\right)$. 7. (1,5). 9. $\frac{5}{2}\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{26}$, $\frac{1}{2}\sqrt{149}$.

К главе II

2. $y=6$. 3. $y=\sqrt{3}x+5$. 4. $y=x-6$. 5. $y=2$. 6. $x=-4$. 7. (1, 1). 8. Прямые параллельны. 9. Прямые сливаются.

К главе III

1. $A(2, 1)$, $B(0, -2)$, $C(-4, 0)$, $D(-1, -3)$. 3. Вершина расположена в точке (1, 1); ветви направлены в сторону положительных ординат. 4. $(-2, 0)$. 5. Вершина находится в точке $(-4, -2)$; ветви идут в сторону отрицательных ординат.

К главе IV

1. а) $\frac{2\pi}{10}$; б) 20π; в) $\frac{2\pi}{6}$. 2. -5. 3. 5. 4. $\frac{1}{4}$. 5. а) Эллипс с полуосями 4 и 3; б) гипербола; в) окружность радиуса 8 с центром в точке (5, 0). 6. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{7}x$.

К главе V

3. а) Всюду, кроме $x=\pm 4$; б) $x>1$; в) всюду; г) всюду, кроме $x=2$; д) всюду; е) $x=0$. 4. а) 1; б) -1; в) 0. 5. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. $u=\sin x$, $v=\log u$, $w=\sqrt{v}$. 7. $\pm\sqrt{2}-1$. 8. $y=x+b$, где b — произвольное число.

К главе VI

1. 2. **2.** 1. **3.** 2. **4.** 3. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** 0. **7.** 6. **8.** 0. **9.** 3. **10.** ∞. **11.** 0. **12.** $\frac{7}{5}$. **13.** ∞. **14.** 0. **15.** $\frac{1}{2}$. **16.** ∞. **17.** 3.

К главе VII

1. $y'=14x^6$. **2.** $y'=4x^3-x^2+4x$. **3.** $y'=x^2\cos x+2x\sin x$. **4.** $y'=-2\sin 2x$. **5.** $y'=-\frac{5}{\sin^2 5x}$. **6.** $y'=13e^{13x}$. **7.** $y'=6x(x^2+1)^2$. **8.** $y'=-\sin 2x$. **9.** $y'=2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}$. **10.** $y'=-\operatorname{tg} x$. **11.** $y'=-\sin x\, e^{\cos x}$. **12.** $f'(x)=\frac{3}{5}x^2$. **13.** $f'(x)=(2x+3x^2)\cos(x^2+x^3)$. **14.** $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(3)=33$. **15.** $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $f'(0)=1$. **16.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **17.** $f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$. **18.** $y-1=0\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **19.** $y-1=1(x-0)$. **20.** $y-3=8(x-1)$. **21.** $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **22.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **23.** а) $y^{\mathrm{IV}}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$; б) $y^{\mathrm{III}}=\sin x$; в) $\frac{2}{x^3}$; г) $f''(x)=90x^8$.

К главе VIII

1. -4, 4; на $-\infty<x<-4$ возрастает; на $-4<x<4$ убывает; на $4<x<+\infty$ возрастает. **2.** 0, 3, 5; на $-\infty<x<0$ убывает; на $0<x<3$ возрастает; на $3<x<5$ убывает; на $5<x<+\infty$ возрастает. **3.** Критических значений нет. **4.** 0; на $-\infty<x<0$ возрастает; на $0<x<+\infty$ убывает. **5.** При $x=-4$ максимум, при $x=4$ минимум. **6.** При $x=0$ минимум, при $x=3$ максимум, при $x=5$ минимум. **7.** При $x=0$ максимум. **8.** При $x=2$ минимум. **10.** $10=5+5$. **11.** а) Всюду выпукла; б) при $-\frac{\pi}{2}<x<0$ выпукла; при $0<x<\frac{\pi}{2}$ вогнута; при $x=0$ — точка перегиба.

К главе IX

1. $4h^3$; $\sin^3 h$. **2.** h^4, $\sin^4 h$, h^5 — бесконечно малые высшего порядка; $5\sin^2 h$, $\sin h^2$, $\sin^2 h$ — того же порядка, что и h^2; $\sin h^2$, $\sin^2 h$ — эквивалентные. **3.** а) $5(x+3)^4\,dx$; б) $\cos(x+1)\,dx$; в) $\cos x\,dx$; г) $\frac{dx}{x}$. **4.** $\sqrt[4]{x}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}h$; $2+\frac{0,1}{32}$. **5.** $\sin x\approx x$. **6.** $\operatorname{arctg} x$.

К главе X

1. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}+x+C$. 2. $e^x+\sin x+C$. 3. $\operatorname{tg} x+\operatorname{arctg} x+\arcsin x+C$. 4. $5e^x+C$. 5. $-6\operatorname{ctg} x+C_0$. 6. $x\sin x+\cos x+C$. 7. $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. 8. $\frac{\sin^2 x}{2}+C_1$ или $-\frac{\cos 2x}{4}+C_2$. 9. $\frac{1}{4}e^{4x}+C$. 10. $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. 11. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. 12. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x+C$. 13. $2\left[\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right]+C$. 14. $\ln(5+x)+C$. 15. $\frac{1}{2}\ln(5+2x)+C$. 16. $-\ln(1-x)+\ln(1+x)+C$. 17. $-\ln(1-x)+\ln(1+x)+C$ (ср. ответ 16). 18. $-\frac{1}{12}\ln(1-x)+\frac{1}{12}\ln(1+x)+C$.

К главе XI

1. $\frac{3}{2}$. 2. 0. 3. $\frac{2}{3}$. 4. $e-1$. 5. $\operatorname{arctg} 2-\operatorname{arctg} 0=\operatorname{arctg} 2$. 6. $\ln x$. 7. $-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

К главе XII

1. $\frac{88}{3}$. 2. $1-\frac{\pi}{4}$. 3. $\frac{27}{8}$. 4. $\frac{\pi^2}{4}$. 5. $\frac{256}{15}\pi$. 6. $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$. 7. $\frac{4}{5}$. 8. 576. 9. $\ln 3$. 10. $\frac{8}{27}(10^{3/2}-1)$.

К главе XIV

1. $\sqrt{24}$. 2. $x=\pm 3$. 3. Эта плоскость отсекает от координатных осей отрезки 6, 4, 6. 4. Поверхность получена вращением эллипса $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ вокруг оси Oz. 5. Окружности. 6. а) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}=\sin x$; в) $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin(xy)}\cos(xy)$; г) $\frac{\partial z}{\partial t}=xt^{x-1}$; д) $z'_u=x+2u$; е) $z'_u=x\sin 2xu$; ж) $\frac{\partial W}{\partial x}=2zx\ln y$, $\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{zx^2}{y}$. 7. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 8. Лежит.

К главе XV

1. Окружности 2. $y=\frac{4}{3}x$. 3. $x^2-y^2=4^2$. 5. $x-y+\ln(xy)=C$. 6. $\ln y=\frac{x^3}{3}+x+C$. 7. $\sin x\cos y=C$. 8. $x=\ln y+\frac{y^2}{2}+C$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 1 гл. XI

Выведем формулу

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Для этого напишем тождество

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

Придавая k значения 0, 1, 2, ..., n, получим равенства:

$$\begin{aligned}1^3&=1,\\ 2^3-1^3&=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1,\\ 3^3-2^3&=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n+1)^3-n^3&=3\cdot n^2+3\cdot n+1.\end{aligned}$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим:

$$(n+1)^3=3[1^2+2^2+\ldots+n^2]+3[1+2+\ldots+n]+[1+1+\ldots+1],$$

или

$$(n+1)^3=3[1^2+2^2+\ldots+n^2]+3[1+2+\ldots+n]+n+1. \qquad (*)$$

Первая квадратная скобка, стоящая справа, содержит искомую сумму. Обозначим ее через S. Вторая квадратная скобка содержит сумму арифметической прогрессии, она равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Следовательно, равенство (*) можно переписать следующим образом:

$$(n+1)^3=3\cdot S+3\,\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

или

$$3S=(n+1)\left[(n+1)^2-1-\frac{3}{2}n\right],$$

или

$$3S=(n+1)\left(n^2+\frac{1}{2}n\right),$$

откуда получаем:

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Андрей Николаевич Черкасов

Введение в высшую математику

М., 1964 г., 244 стр. с илл.

Редактор *Н. А. Угарова*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 4/V 1964 г. Подписано к печати 27/VII 1964 г. Бумага $84\times108/_{32}$. Физ. печ. л. 7,625 Условн. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 10,62. Тираж 60 000 экз. Т-09158. Цена книги 42 коп. Заказ № 1537.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект,

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета
Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.